---

**21.1**. À rendre. Le but de cet exercice est de donner une preuve terre-à-terre de la relation $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, où $\exp(x)$ est par définition la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Au cours, nous donnons une preuve beaucoup plus conceptuelle de cette relation, mais elle repose sur un théorème général que nous démontrons sur les dérivées des séries...

(a) Sans trop vous soucier de convergence, tentez de développer le produit

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!}\right).$$

(b) Transformez ces calculs en une véritable preuve — en vous souciant donc de convergence!

**21.2**. Soient $R_1$ et $R_2$ les rayons de convergence respectifs des deux séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n$. Définissons $c_n = \sum_{k+j=n} a_k b_j$ et $R = \min(R_1, R_2)$.

(a) Démontrez que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ converge pour tout $x \in ]-R, R[$.

(b) Quelle est la relation entre la fonction définie par cette série et les deux précédentes?

(c) Que pouvez-vous dire du rayon de convergence de cette troisième série?

**21.3**. Au vu du théorème sur la permutation des séries entières avec la dérivation, replongez-vous dans l'exercice 14.3 du 30 octobre. Expliquez pourquoi cela donne un exemple de *série* (pas seulement suite) de fonctions qu'on ne peut pas permuter avec la dérivation.

Tournez et retournez bien tout ça dans votre tête pour être sûr d'avoir bien compris ce qui va et ce qui ne va pas; après tout, la série que vous obtenez à partir de la suite ne contient que des polynômes?! Est-ce qu'on ne peut donc pas la considérer comme série entière?!?