Pour les deux premiers exercices, on rappelle la définition d'une fonction convexe et les résultats de la série 18 du 13 novembre.

20.1. Démontrez que si $f \in C^2(\mathbf{R})$ et si f est convexe, alors on a $\forall x \in \mathbf{R} : f''(x) \geq 0$.

20.2. Démontrez que si $f \in C^2(\mathbf{R})$ et si $\forall x \in \mathbf{R} : f''(x) \geq 0$, alors f est convexe.

20.3. Le but de cet exercice est d'examiner en détail un exemple mentionné en cours. On accepte le fait que la fonction $\exp\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ soit strictement positive et dérivable de dérivée $\exp' = \exp$. On note aussi que sa définition à l'aide d'une série implique $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

On définit la fonction

$$f\colon \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

par $f(x) = \exp(-1/x^2)$ quand $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(i) Démontrez que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$.

(ii) Démontrez que pour tous polynômes P et Q on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)\exp(x)} = 0$.

(iii) Démontrez que f est dérivable en 0 et calculez $f'(0)$.

(iv) Démontrez que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f est n fois dérivable et calculez $f^{(n)}(0)$.

Indication: il n'est pas nécessaire de trouver une formule précise pour $f^{(n)}(x)$...