1.1. Calculer la somme

$$S = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + ... + 2025 \cdot 2^{2025}.$$

...oui, certains diront que, de tête, la somme vaut

1559486872871720284858868370482158250044318766677478305841250876076457
5481669571678121360697012514317156306541658859632362389084749363332819
0942812991550743666069259146254577850585938088390006695163776064132100
9592824636710468825971402175496603864885150367050278698954744445171462
9916476397916330296238684724892285056278401627413365594865486301800942
4914122762311814972530570023093323525609588917236225830279000544199767
5104124350048607164824755442454432706455549144833144804351332294552754
7334506272960336058183491028933652186029230706511437469228928618709359
228783158506565046816969083886897073687803199001460738

...mais vous trouverez une expression plus intelligente!

Indications:

(a) Montrer que

$$S = \sum_{n=1}^{2025} (n-1)2^n + \sum_{n=1}^{2025} 2^n.$$

(b) Montrer que

$$S = 2S - 2 \cdot 2025 \cdot 2^{2025} + \sum_{n=1}^{2025} 2^n.$$

(c) Utiliser la relation $(1 + x + x^2 + ... + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$.

1.2. À rendre: démontrer qu'il n'existe pas de fraction (=nombre rationnel) x telle que $x^2 = 5$.

1.3. Considérons l'équation $x^2 + x + 1 = 0$. Détailler soigneusement ce qui est correct et ce qui ne l'est pas dans le raisonnement suivant.

D'une part, écrivons $x = -1 - x^2$. D'autre part, si l'on divise l'équation de départ par x, on trouve $x + 1 + \frac{1}{x} = 0$ et donc $x = -1 - \frac{1}{x}$. En comparant les deux expressions obtenues pour x, il suit que $x^2 = \frac{1}{x}$. Nous déduisons $x^3 = 1$ et donc $x = 1$.