
Définition. Soient I un intervalle et $f\colon I \to \mathbf{R}$ une fonction. Alors f est dite <u>convexe</u> (sur I) si $\forall a, b \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$, on a

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

Avant de commencer la série, dessinez le graphe d'une fonction de votre choix et illustrez la droite définie par la fonction de λ

$$\lambda \longmapsto \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

pour bien comprendre le choix du terme “convexe”.

18.1. Utilisez Bernoulli–L'Hôpital pour démontrer que si $f \in C^2(\mathbf{R})$ et si $x \in \mathbf{R}$, alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

18.2. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ convexe. Montrez que si $x, y, z \in I$ satisfont $x < y < z$, alors

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

<u>Indication</u>: Commencez par vérifier que $y = \dfrac{z-y}{z-x}\,x + \dfrac{y-x}{z-x}\,z$... définissez un λ...

18.3. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Montrez que f est continue sur I et admet en tout $x \in I$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite en x. (On pourra les noter f'_g et f'_d.)

<u>Indication</u>: Montrez, en utilisant l'exercice 1, que si $x, y, x_0 \in I$, $x \leq y$ et $x, y \neq x_0$, alors

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}.$$