16.1. Soient $a \in \mathbf{R}$ et $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en a. Vérifiez que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Réciproquement, l'existence de cette dernière limite entraîne-t-elle celle de $f'(a)$?

16.2. On désire montrer qu'il existe deux points *antipodaux* sur l'équateur qui ont exactement la même température. Voici une reformulation mathématique:

Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et 2π-périodique, i.e. $f(x+2\pi) = f(x)$ pour tout x. Alors il existe x avec $f(x) = f(x+\pi)$.

Convainquez-vous que c'est bien une formulation mathématique de notre énoncé équatorial plus vague.

Démontrez l'énoncé mathématique.

16.3. On considère la fonction $f\colon [-1,1] \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ 0 \neq x \in [-1,1],\ f(0) = 0.$$

Pour quel(s) m a-t-on $f \in C^m([-1,1])$?