15.1. À rendre. Donnez une preuve détaillée du théorème suivant qui a été esquissé en classe. Soit $0 < L < 1$ et soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall\, x, y \in \mathbf{R}$: $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

On dit alors que f est <u>L-Lipschitz</u>.

(i) Vérifiez que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

(ii) Démontrez que f admet un point fixe.

(iii) Montrez que ce point est unique.

<u>Indication</u>. Pour x_0 donné, considérez la suite définie récursivement par $x_{n+1} = f(x_n)$.

15.2. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in \mathbf{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Montrez que f est dérivable en 0 et nulle part ailleurs.

15.3. Déterminez quand la dérivée existe, et le cas échéant calculez-la, pour la fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dans les deux situations suivantes:

(i) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^4}$,

(ii) $f(x) = x^2\,[x]$, où $[x]$ dénote la partie entière de x.