14.1. Assurez-vous de bien comprendre tous les cas à considérer dans la preuve qu'une fonction continue et injective sur un intervalle doit être monotone.

14.2. Soient $a < b$ et $f\colon [a,b] \to [a,b]$ une fonction croissante.

(i) Montrez que f admet un point fixe.

(ii) Que devient ce résultat si f est supposée décroissante?

14.3. Pour chaque entier $n \geq 0$, on considère la fonction polynomiale $P_n\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $P_0(x) = 0$ et

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right).$$

(i) Montrez que pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $n \geq 0$:

$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}.$$

(ii) Déduisez-en que la suite $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément vers la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

(iii) Montrez qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $Q_n\colon [-1,1] \to \mathbf{R}$ qui converge uniformément vers la fonction $g\colon [-1,1] \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = |x|$.

Indication: commencez par montrer par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$.