13.1. Soit $I =]0, +\infty[$ et $f\colon I \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$. Démontrez que f est uniformément continue sur I.

Indications. Pour cet exercice, on se permet d'utiliser le fait que la fonction sin est continue sur $\mathbf{R}$ et satisfait $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On peut aussi admettre des formules trigonométriques, p.ex. pour $\sin x - \sin y$ et $|\cos| \leq 1$.

13.2. À rendre:

(i) Soient $a \in \mathbf{R}$ et $f\colon]a, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_2.$$

Montrez que f est uniformément continue sur $]a, +\infty[$.

(ii) Donnez un exemple qui montre que la conclusion n'est pas valide sans l'hypothèse sur l'existence de la limite à droite en a.

(iii) Donnez un exemple qui montre que la conclusion n'est pas valide sans l'hypothèse sur l'existence de la limite à gauche en $+\infty$.

13.3. Soit $f\colon [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction uniformément continue. Montrez qu'il existe deux constantes α et β telles que pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$|f(x)| \leq \alpha x + \beta.$$

Indications:

(a) Montrez qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in [0, +\infty[$, $|x - y| \leq \delta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq 1$.

(b) Vérifiez que $|f(n\delta) - f(0)| \leq n$, $\forall n = 0, 1, \ldots$.

(c) Montrez que $|f(x)| \leq 1 + m + |f(0)|$ avec $m = \left[\frac{x}{\delta}\right]$ où $[y]$ dénote la partie entière de $y \in \mathbf{R}$.