12.1. Les Deux Gendarmes II, le retour:

Soient $f, g, h\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ trois fonctions et soit $a \in \mathbf{R}$. On suppose que f et h admettent une même limite ℓ en a et que la relation $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ soit valide pour tout x dans un voisinage de a.

(i) Donnez explicitement la définition mathématique de la dernière hypothèse ci-dessus.

(ii) Démontrez $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

12.2. Soient $a \in \mathbf{R}$ et $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue en a telle que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1.) Montrez que la fonction f est continue partout.

2.) Déduisez-en que f est linéaire; plus précisément, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f(x) = x\,f(1).$$

<u>Indications:</u>

Montrez que $f(0) = 0$ et f est continue en $x = 0$.

Montrez que f est continue partout.

Montrez que $f(n) = n\,f(1)$, $\forall n \in \mathbf{Z}$.

Montrez que $f(x) = x\,f(1)$, $\forall x \in \mathbf{Q}$.

Remarque importante pour justifier tout ce travail: en utilisant un peu d'algèbre, on peut montrer que la conclusion de cet exercice est fausse si l'on ne suppose pas f continue!

12.3. Profitez de vos vacances!