10.1. Soit (x_n) une suite qui converge vers $\ell \in \mathbf{R}$. Montrez que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \ell.$$

Note: cette procédure s'appelle la sommation de Cesàro.

10.2. Prouvez les affirmations suivantes directement à l'aide de la définition avec ϵ et δ (sans utiliser d'autres résultats).

i) $\lim_{x\to1}(2x+8) = 10$, *ii)* $\lim_{x\to2} x^2 = 4$, *iii)* $\lim_{x\to-2}(|x| - x^3) = 10$.

10.3. Calculez $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x)$ dans les cas où $f : D \to \mathbf{R}$ et $x_0 \in \mathbf{R}$ sont définis par:

a) $D = \mathbf{R} - \{-1, +1\}$, $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $x_0 = 1$;

b) $D = \mathbf{R} - \{-1, +1\}$, $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $x_0 = -1$;

c) $D = \mathbf{R}$, $f(x) = x$ si $x \in \mathbf{Q}$, $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{Q}$, $x_0 = 0$;

d) $D = \mathbf{R}$, $f(x) = x$ si $x \in \mathbf{Q}$, $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{Q}$, $x_0 = 1$.