

9.1. Le point crucial est le rapport entre la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et les séries $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^+$ et $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^-$ constituées des termes positifs et respectivement négatifs de x_n .

Il est bien correct que la convergence absolue de la première implique la convergence (automatiquement absolue) des deux autres. Cela suit, comme indiqué au cours, de la relation $x_n = x_n^+ + x_n^-$. En revanche, l'énoncé correspondant est incorrect pour la convergence (non absolue) de $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

Passons au cas de la série qui converge sans converger absolument:

En notant s_n , s_n^+ et s_n^- pour les sommes partielles, on a $s_n = s_n^+ + s_n^-$ pour tout n . Puisque la suite (s_n) converge, il suit que (s_n^+) converge si et seulement si (s_n^-) converge (par la proposition sur la somme/différence de limites). En conclusion, si l'une des séries $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^+$ ou $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^-$ convergeait, alors les deux convergeraient. Mais on a $|x_n| = x_n^+ - x_n^-$, et donc cette hypothèse entraînerait la convergence absolue de $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, ce qui est absurde.

9.2. (i) Par le critère de d'Alembert, la série converge (absolument), car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^4}{3n^4} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^4}{3n^4} = \frac{1}{3} < 1.$$

(ii) Cette série converge par le critère des séries alternées. En effet, $x_n = \frac{(-1)^n}{3n-2}$ pour $n \geq 1$ satisfait les trois conditions de ce critère

- le signe de x_n change avec la parité de n ,
- la suite des valeurs absolues $|x_n| = \frac{1}{3n-2}$ est décroissante,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Notons encore que la série absolue $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ ne converge pas parce que $\frac{1}{3n-2} \geq \frac{1}{3n}$ et la

série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

(iii) On a

$$\sqrt{n^2+7} - n = \frac{(\sqrt{n^2+7} - n)(\sqrt{n^2+7} + n)}{\sqrt{n^2+7} + n} = \frac{7}{\sqrt{n^2+7} + n}.$$

Observons que pour $n > 3$, on a $n^2 + 7 < (n+1)^2$ et donc

$$\frac{7}{\sqrt{n^2+7} + n} > \frac{7}{\sqrt{(n+1)^2 + n}} > \frac{7}{3n}.$$

Comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{3n} = \frac{7}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, la série initiale diverge aussi par le critère de comparaison.

9.3. Etudions la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n}{n^2+n+1} \right)$.

1.) Montrons que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ converge.

On a

$$x_n = \frac{1}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}$$

et donc

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le critère de d'Alembert nous permet de conclure que la série converge.

2.) Montrons que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$ converge.

Si on pose

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n^2+n+1},$$

on vérifie aisément que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad x_n \cdot x_{n+1} < 0 \quad \text{et} \quad |x_{n+1}| < |x_n|.$$

Le critère des séries alternées nous permet de conclure que la série converge.

Puisque, par les points 1.) et 2.), les deux séries convergent séparément, leur somme converge également.

9.4.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) = 1 \end{aligned}$$