

8.1. Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels. Montrons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) < +\infty \iff \exists \ell \in \mathbf{R}, \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell.$$

Développons les sommes partielles de la série:

$$S_n = \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + \cdots + a_n - a_{n-1} + a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_0.$$

En passant à la limite, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}) - a_0.$$

Ainsi, on a bien que la limite de  $S_n$  existe si et seulement si la limite de la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  existe.

8.2. Identifions les trois constantes  $\alpha, \beta$  et  $\mu$  telles que pour tout entier  $n \geq 3$ :

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{\alpha}{(n-1)!} + \frac{\beta}{(n-2)!} + \frac{\mu}{(n-3)!}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{n^3}{n!} &= \frac{\alpha}{(n-1)!} + \frac{\beta}{(n-2)!} + \frac{\mu}{(n-3)!} \\ &= \frac{n\alpha + n(n-1)\beta + n(n-1)(n-2)\mu}{n!}. \end{aligned}$$

Les coefficients  $\alpha, \beta$  et  $\mu$  vérifient donc le système suivant:

$$\begin{cases} \mu = 1 \\ \beta - 3\mu = 0 \\ \alpha - \beta + 2\mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Ainsi, si  $n \geq 3$ ,

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!}.$$

A présent considérons les sommes partielles

$$S_p = \sum_{n=1}^p \frac{n^3}{n!}, \text{ avec } p \geq 3.$$

Par ce qui précède nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
 S_p &= \sum_{n=1}^p \frac{n^3}{n!} = \sum_{n=1}^2 \frac{n^3}{n!} + \sum_{n=3}^p \left[ \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!} \right] \\
 &= \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \sum_{n=3}^p \frac{1}{(n-1)!} + 3 \sum_{n=3}^p \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^p \frac{1}{(n-3)!} \\
 &= 1 + 4 + \sum_{n=2}^{p-1} \frac{1}{n!} + 3 \sum_{n=1}^{p-2} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} \\
 &= 5 + \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{(p-2)!} + \frac{1}{(p-1)!} + 3 \left( \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} + \frac{1}{(p-2)!} \right) + \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} \\
 &= 5 \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} + 4 \frac{1}{(p-2)!} + \frac{1}{(p-1)!}.
 \end{aligned}$$

En passant à la limite nous obtenons:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} &= \lim_{p \rightarrow \infty} S_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ 5 \sum_{n=0}^{p-3} \frac{1}{n!} + 4 \frac{1}{(p-2)!} + \frac{1}{(p-1)!} \right] \\
 &= 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 5e.
 \end{aligned}$$

**8.3.** Soient  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  deux suites de nombres réels positifs pour lesquelles il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \text{pour tout entier } n \geq n_0.$$

1) Montrons que  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ .

Par hypothèse, on a

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} = \beta, \quad \forall n \geq n_0.$$

Ainsi  $a_n \leq \beta b_n, \forall n \geq n_0$ . Si de plus on pose  $M = \max_{k=0, \dots, n_0-1} |a_k|$ , on a pour  $p \geq n_0$ ,

$$S_a^p = \sum_{k=0}^p a_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k + \sum_{k=n_0}^p a_k \leq M n_0 + \beta \sum_{k=n_0}^p b_k \leq M n_0 + \beta \sum_{k=0}^p b_k.$$

Par hypothèse, la suite  $\left( \sum_{k=0}^p b_k \right)_{p=0}^{\infty}$ , qui est croissante, converge ; posons  $\ell > 0$  sa limite.

On a alors

$$S_a^p \leq M n_0 + \beta \ell, \quad \forall p \geq n_0.$$

La suite  $(S_a^p)_{p=0}^{\infty}$  étant de plus croissante, elle converge et donc la série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge.

2) Montrons que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ .

C'est une conséquence de la relation suivante obtenue au point 1):

$$\sum_{k=0}^p a_k \leq M n_0 + \beta \sum_{k=0}^p b_k, \quad \forall p \geq n_0.$$