7.1. (i) Montrons que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ donnée par $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n > 0$ est de Cauchy.
On a, pour $n, m \geq 1$:

$$|x_{n+m} - x_n| = \Big|\frac{(-1)^{n+m}}{n+m} - \frac{(-1)^n}{n}\Big| = \Big|\frac{(-1)^m}{n+m} - \frac{1}{n}\Big| = \Big|\frac{n(-1)^m - (n+m)}{(n+m)n}\Big|$$

et donc

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{m+2n}{(n+m)n} = \frac{1}{n+n^2/m} + \frac{2}{n+m} \leq \frac{3}{n},$$

ce qui montre que la suite est de Cauchy. En effet, pour $\epsilon > 0$ donné, on choisit un entier N tel que $N > \frac{3}{\epsilon}$ et on vérifie que $|x_p - x_q| < \epsilon$ si $p, q > N$.

(ii) Montrons que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ n'est pas de Cauchy, i.e.:

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbf{N}, \exists m, n \geq N \text{ tel que } |x_n - x_m| > \epsilon.$$

Il suffit de prentre $\epsilon = 1$ et $n = N, m = N+1$ pour avoir $|x_m - x_n| = 2 > 1$.

(iii) Montrons que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée récursivement par $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{x_n+2}$, $n \geq 0$, $x_0 = 1$ est de Cauchy et calculons sa limite.
Pour $n > 0$, on a, puisque $x_n > 0$, $\forall n$:

$$|x_{n+1} - x_n| = \Big|\frac{x_n+1}{x_n+2} - \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}+2}\Big| = \Big|\frac{(x_n+1)(x_{n-1}+2) - (x_{n-1}+1)(x_n+2)}{(x_n+2)(x_{n-1}+2)}\Big| = \Big|\frac{x_n - x_{n-1}}{(x_n+2)(x_{n-1}+2)}\Big|$$

et donc

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|.$$

Par conséquent:

$$|x_{n+m} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|\Big(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}}\Big) \leq \frac{1}{2^{n-1}}|x_1 - x_0|,$$

ce qui montre que la suite est de Cauchy. Sa limite x vérifie $x = \frac{x+1}{x+2}$ ou encore $x^2 + x - 1 = 0$ et donc $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

(iv) On considère la suite donnée par $8, 8.8, 8.88, 8.888, 8.8888, \ldots$. Est-ce que cette suite converge et, si oui, quelle est sa limite?
Considérons une autre suite $1, 1.1, 1.11, 1.111, \ldots$ dont le terme général est $x_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k$, $n \geq 0$. Donc, en appliquant une formule algébrique, $x_n = (1 - (1/10)^{n+1})/(1 - (1/10))$. Ceci converge vers $\frac{1}{1-1/10} = 10/9$. On en déduit que la suite donnée initialement converge vers $80/9 = 9 - 1/9$.

7.2. (i) Montrons pour commencer que $\forall \delta > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\delta)^n} = 0$.
On applique le critère de d'Alembert:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{(1+\delta)^{n+1}}}{\frac{n}{(1+\delta)^n}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(1+\delta)^n}{n(1+\delta)^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)}{(1+\delta)} = \frac{1}{(1+\delta)} < 1, \quad \forall \delta > 0, \\ \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\delta)^n} &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\left| \frac{n}{(1+\delta)^n} \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

En particulier en prenant $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{(1+\delta)^n} \right| = \frac{n}{(1+\delta)^n} &< 1, &\quad \forall n > N \\ \iff \qquad n &< (1+\delta)^n, &\quad \forall n > N. \end{aligned}$$

(ii) Montrons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon, \quad \forall n > N.$$

Par le point (i), on a l'existence de $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$n < (1+\epsilon)^n, \quad \forall n > N \qquad \iff \qquad \sqrt[n]{n} - 1 = |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon, \quad \forall n > N.$$

On a donc prouvé que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$