

6.1. Soit  $(x_n)_{n=0}^\infty$  une suite bornée et désignons par  $E$  l'ensemble de ses points d'accumulation; montrons que

$$\sup E = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

(1) Comme  $(x_n)_{n=0}^\infty$  est bornée, par le théorème de Bolzano–Weierstraß, il existe une sous-suite  $(x_{n_j})_{j \geq 0} \subset (x_n)_{n \geq 0}$  convergente et donc il existe au moins un point d'accumulation. Ainsi  $E \neq \emptyset$ . De plus, comme  $(x_n)_{n=0}^\infty$  est bornée,  $E$  l'est aussi.

(2) Posons  $\alpha = \sup E$ ,  $\beta = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ . On rappelle que

$$\text{si } y_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, \dots\}, \text{ alors } \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

On va montrer que  $\beta \in E$  :

i. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , par définition de  $y_n$  et du sup, il existe  $k_n \in \mathbf{N}$ ,  $k_n \geq n$  tel que

$$0 \leq y_n - x_{k_n} \leq \frac{1}{n}.$$

ii. On a  $x_{k_n} = x_{k_n} - y_n + y_n$  et puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{k_n} - y_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta,$$

on a bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = \beta.$$

Ainsi  $\beta \in E$  et donc  $\beta \leq \alpha$ .

Remarquons que la suite d'entiers  $(k_n)_{n=0}^\infty$  ainsi construite n'est pas nécessairement strictement croissante et donc que  $\{x_{k_n}\}_{n=0}^\infty$  ne définit pas forcément une sous-suite de  $(x_n)_{n=0}^\infty$ . Cependant, puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$ , on peut en extraire une sous-suite de  $(x_n)_{n=0}^\infty$  qui converge vers  $\beta$ .

(3) Soit  $\lambda \in E$ ; il existe une sous-suite  $(x_{n_j})_{j \geq 0} \subset (x_n)_{n \geq 0}$  qui converge vers  $\lambda$ , i.e.  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = \lambda$ .

Rappelant que  $y_{n_j} = \sup\{x_{n_j}, x_{n_j+1}, x_{n_j+2}, \dots\}$ , on a  $x_{n_j} \leq y_{n_j}$ , pour tout  $j \in \mathbf{N}$  ainsi

$$\beta = \lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_j} \geq \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = \lambda.$$

Vu le caractère arbitraire du choix de  $\lambda$ , on en déduit que

$$\beta \geq \alpha.$$

Les étapes (2) et (3) montrent que  $\alpha = \beta$ .

**6.2.** La suite  $(x_n)_{n=0}^\infty$  est donnée par

$$x_0 = 0, \quad x_{\frac{q(q-1)}{2}+p} = \frac{p}{q},$$

pour  $1 \leq p \leq q$ ,  $q = 1, 2, \dots$ . Pour justifier que cette définition est bien valide ("bien définie"), il faut montrer que chaque entier  $n \geq 1$  peut s'écrire comme  $n = q(q-1)/2 + p$  pour un choix d'entiers  $1 \leq p \leq q$  et que de plus ce choix est unique. Puisque  $q(q-1)/2 + p = p + 1 + \dots + q - 1$  (avec le cas particulier  $p+0$  si  $q = 1$ ), on voit que cette écriture n'est rien d'autre que l'expression de  $n$  comme la somme de plus grand nombre d'entiers consécutifs possible sans atteindre  $n$  (donc  $1 + \dots + q - 1 < n$ ) plus du reste (qui est donc  $1 \leq p \leq q$ ).

(a) En prenant successivement  $q = 1, p = 1$  puis  $q = 2$  avec  $p = 1, 2$ ,  $q = 3$  avec  $p = 1, 2, 3, \dots$  etc, la suite  $(x_n)_{n=0}^\infty$  s'écrit:

$$0, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$$

(b) Points d'accumulation de la suite:

- Soit  $\lambda \in \mathbf{Q} \cap ]0, 1]$ . Alors, il existe  $p, q \in \mathbf{N}^*$  tels que  $p \leq q$  et  $\lambda = \frac{p}{q}$ . Si  $k = 1, 2, 3, \dots$ , posons

$$m_k = \frac{kq(kq-1)}{2} + kp.$$

Par définition de la suite, nous obtenons

$$x_{m_k} = \frac{kp}{kq} = \lambda.$$

Ainsi, la sous-suite  $(x_{m_k})_{k=1}^\infty$  de la suite  $(x_n)_{n=0}^\infty$  converge vers  $\lambda$  ce qui prouve que  $\lambda$  est un point d'accumulation.

- Si on pose

$$m_q = \frac{q(q-1)}{2} + 1$$

où  $q = 1, 2, \dots$ , on obtient  $x_{m_q} = \frac{1}{q}$  et la sous-suite  $(x_{m_q})_{q=1}^\infty$  de la suite  $(x_n)_{n=0}^\infty$  converge vers  $\lambda = 0$  ce qui montre que  $\lambda = 0$  est un point d'accumulation.

**Conclusion 1:** L'ensemble  $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$  est un ensemble de points d'accumulation de la suite  $(x_n)_{n=0}^\infty$ .

- Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ . Si  $\lambda \in \mathbf{Q}$ , alors on a vu que  $\lambda$  est un point d'accumulation de la suite  $(x_n)_{n=0}^\infty$ . Si  $\lambda \notin \mathbf{Q}$ , alors par densité de  $\mathbf{Q}$  dans  $\mathbf{R}$  il existe deux suites d'entiers  $(p_k)_{k=1}^\infty$  et  $(q_k)_{k=1}^\infty$  tels que  $1 \leq p_k \leq q_k$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{q_k} = \lambda$ . Posons

$$m_k = \frac{kq_k(kq_k-1)}{2} + kp_k, \quad k = 1, \dots, \infty.$$

On a donc

$$x_{m_k} = \frac{p_k}{q_k}.$$

La suite des entiers  $(m_k)_{k=1}^\infty$  ainsi construite n'est pas nécessairement strictement croissante, mais elle tend vers l'infini lorsque  $k$  tend vers l'infini. Ainsi, on peut extraire une sous-suite  $(m_{k_j})_{j=1}^\infty$  de  $(m_k)_{k=1}^\infty$  qui est strictement croissante et qui tend vers l'infini lorsque  $j$  tend vers l'infini. Ainsi donc,  $(x_{m_{k_j}})_{j=1}^\infty$  est une sous-suite de  $(x_n)_{n=0}^\infty$  qui converge vers  $\lambda$  puisque  $x_{m_{k_j}} = \frac{p_{k_j}}{q_{k_j}}$ , ce qui prouve que  $\lambda$  est un point d'accumulation de la suite  $(x_n)_{n=0}^\infty$ .

**Conclusion 2:** L'ensemble des points d'accumulation de la suite  $(x_n)_{n=0}^\infty$  est donné par l'intervalle fermé  $[0, 1]$ .