5.2. 1) *(Convergence)* Nous montrons par récurrence que la suite est minorée par 1 et décroissante. Il est avantageux pour la récurrence de montrer l'énoncé plus complet suggéré en indication, i.e.

$$1 < x_{n+1} < x_n < x_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

a) Pour $n = 1$, on a

$$x_0 = 3 > x_1 = 2 > x_2 = \sqrt[3]{2+3} > 1.$$

(Justifiez encore la dernière inégalité: pourquoi suit-elle de $5 > 1$?)

b) On suppose maintenant l'hypothèse vraie jusqu'à $n \in \mathbf{N}^*$ et on va montrer qu'elle est vraie pour $n+1$. On a donc

$$1 < x_{k+1} < x_k < x_{k-1}, \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

et on veut montrer que

$$1 < x_{n+2} < x_{n+1} < x_n.$$

Comme la fonction $\sqrt[3]{x}$ est strictement croissante on a bien par l'hypothèse de récurrence que

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + x_{n-1}} \quad > \quad \sqrt[3]{x_{n+1} + x_n} = x_{n+2}.$$

De plus, comme x_n et x_{n+1} sont plus grands que 1, on a

$$x_{n+2} = \sqrt[3]{x_{n+1} + x_n} > 1.$$

Ainsi la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est minorée et décroissante, donc convergente.

2) *(Limite)* Si $x \in \mathbf{R}$ est la limite de la suite, il vérifie alors l'équation

$$x^3 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \text{ ou } \ x = \pm\sqrt{2}.$$

Mais comme $x_n > 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, on a finalement que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sqrt{2}$.