4.1.

- Montrons que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge vers α, où $\alpha = \inf\{\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\}$.
  Avant cela, on observe que pour $p, q, r \in \mathbf{N}^*$, on a:
  $$x_{pq+r} \leq x_{pq} + x_r \leq x_q + x_{(p-1)q} + x_r \leq \ldots \leq p x_q + x_r.$$
  Soit $\epsilon > 0$. Par la propriété de l'inf, il existe $q \in \mathbf{N}^*$ tel que $\alpha \leq \frac{x_q}{q} < \alpha + \frac{\epsilon}{2}$.
  On prend un entier $N > q$ tq $N > 2\max\{x_r : r = 0, \ldots, q-1\}/\epsilon$. On a alors, pour $n > N$:
  $$\alpha \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{p x_q + x_r}{n} = \frac{p x_q}{pq + r} + \frac{x_r}{n} \leq \frac{x_q}{q} + \frac{x_r}{N} < \alpha + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \alpha + \epsilon$$
  où on a écrit n de la forme $n = pq + r$, avec $0 \leq r < q$. Ceci prouve la convergence de la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ vers α.

- Si on définit la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ par $x_n = 0$ si n est pair et $x_n = 1$ si n est impair, la suite est sous-additive:
  $x_{n+m} \in \{0, 1\}$, or $x_n + x_m = 0$ si et seulement si n et m sont pairs, auquel cas $n + m$ est aussi pair.
  En revanche, $\left(x_n/n\right)_{n=1}^{\infty}$ n'est pas monotone.

4.2. Pour $n = 1$, on a
$$(x+y) = \underbrace{\binom{1}{0}}_{1} x^0 y^1 + \underbrace{\binom{1}{1}}_{1} x^1 y^0 = y + x.$$

On suppose
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots, N$$

et on veut montrer que c'est encore vrai pour $n = N+1$. On a:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{N+1} &= (x+y)(x+y)^N = (x+y)\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^k y^{N-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^{k+1}y^{N-k} + \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^k y^{N-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^{k+1}y^{(N+1)-(k+1)} + \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^k y^{(N+1)-k} \\
&= \sum_{k=1}^{N+1}\binom{N}{k-1}x^k y^{(N+1)-k} + \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}x^k y^{(N+1)-k} \\
&= x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k-1}x^k y^{(N+1)-k} + \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}x^k y^{(N+1)-k} + y^{N+1} \\
&= x^{N+1} + y^{N+1} + \sum_{k=1}^{N}\binom{N+1}{k}x^k y^{(N+1)-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N+1}\binom{N+1}{k}x^k y^{(N+1)-k}.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que

$$\begin{aligned}\binom{N}{k-1}+\binom{N}{k} &= \frac{N!}{(k-1)!(N-k+1)!}+\frac{N!}{k!(N-k)!}\\ &= \frac{N!\cdot k}{k!(N+1-k)!}+\frac{N!(N-k+1)}{k!(N+1-k)!}=\frac{(N+1)!}{k!(N+1-k)!}.\end{aligned}$$

4.3.

(a) En applicant la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

avec $a=1$, $b=\frac{1}{n}$, on vérifie que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

et par suite $(1+\frac{1}{n})^n\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\qquad(0!=1)$.

(b) Puisque $\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{2^{k-1}},\ k\geq 1$ et $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\leq 2$, on obtient

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq 3,$$

ce qui prouve que la suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est bornée.

(c) Montrons que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante. En reprenant l'expression de $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ développée par le binôme de Newton, on vérifie que

$$\begin{aligned}x_n\leq 1+\frac{1}{1!}&+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\\ &+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\ &+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\end{aligned}$$

et ainsi $x_n\leq x_{n+1}$. On conclut que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante et bornée; par un énoncé du cours, elle est donc convergente. De plus, pour $n=2$, on a $x_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2$. On en conclut, puisque $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante que $\lim_{n\to\infty}x_n>2$.