

- 3.1.** On suit exactement la preuve du cours; il faut juste trouver un  $\epsilon$  qui fait marcher l'algèbre.
- 3.2.** Voir Wikipedia. Le point important est que les nombres  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$   $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  ont les propriétés  $\varphi + \psi = 1$  et  $\varphi\psi = -1$ ; vous voyez pourquoi? On appelle  $\varphi$  le nombre d'or.
- 3.3.** Premier point. Grâce à la propriété archimédienne, il existe  $m \in \mathbf{N}$  avec  $m > x$ . Par ailleurs, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers  $m' \in \mathbf{Z}$  avec  $x < m' \leq m$ : en effet il ne peut pas y en avoir plus que  $m - x$ . Nous pouvons donc choisir le plus petit d'entre eux, que nous appelons  $n$ . Pour être très précis: on peut toujours choisir le plus petit d'un ensemble *fini* de nombres, en appliquant un nombre fini de fois l'axiome qui postule:  $\forall a, b : a \leq b$  ou  $b \leq a$ .

Il reste à justifier  $n < y$ . Si ce n'était pas le cas, alors  $n \geq y > x + 1$ , donc  $n - 1 > x$ , contredisant le choix de  $n$ .

Deuxième point. Si  $x$  est entier, poser  $n = x$ . Si  $x$  n'est pas entier, le raisonnement ci-dessus nous fournit un entier  $m$  qui est minimal parmi tous les entiers avec  $m > x$ ; poser  $n = m - 1$ . Dans les deux cas, la condition est satisfaite — et aucun autre entier  $n'$  ne peut la satisfaire, puisque  $|n' - n| \geq 1$ .