2.1. Pour être totalement certains de ne rien avoir escamoté, vous pouvez échanger vos réponses avec un camarade et vous mettre au défi de trouver une insuffisance dans vos raisonnements respectifs; ou alors soumettez votre travail à un assistant.

Voici juste un exemple de raisonnement complet: prenons $-(x+y) = -x-y$. D'abord, rappelons que $-x-y$ est une notation simplifiée pour $-x+(-y)$. Pour démontrer que cet élément est égal à $-(x+y)$, on rapelle que ce dernier est l'unique élément z tel que $(x+y)+z = 0$. Il s'agit donc de vérifier que $-x+(-y)$ satisfait cette propriété, i.e. que $(x+y)+(-x+(-y)) = 0$. Mais cette équation est bien valide car elle suit de l'application de l'associativité, puis de la commutativité et finalement de la propriété du 0, comme ceci:

$$(x+y)+(-x+(-y)) = x+y+(-x)+(-y) = x+(-x)+y+(-y) = 0+0 = 0.$$

2.2. 1.) S=$\{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$: S est majoré par 1 et minoré par 0 et donc borné; on a $\inf S = 0$ et $\sup S = 1$ puisque 0 et 1 appartiennent à S.

2.) S=$\{x \in \mathbf{Q} : 0 < x < 1\}$: S est majoré par 1 et minoré par 0 et donc borné; on a $\inf S = 0$ et $\sup S = 1$ et 0 et 1 n'appartiennent pas à S; mais S contient en particulier $\frac{1}{n}$ et $1 - \frac{1}{n}$ pour $n = 2, 3, \ldots$ ce qui montre qu'on ne peut pas trouver de minorant > 0 ni de majorant < 1.

3.) $S = \{x_n = (-1)^n, n \in \mathbf{N}\}$: S est borné; on a $\inf S = -1$ et $\sup S = 1$ puisque -1 et $1 \in S$ et $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

4.) $S = \{x \in \mathbf{Q} : x < \sqrt{2}\}$: S n'est pas minoré, mais S est majoré par $\sqrt{2}$; si $M = \sup S$, on a $M \leq \sqrt{2}$; si on avait $M < \sqrt{2}$, il existerait a rationnel (par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$) tq $M < a < \sqrt{2}$; on aurait donc $a \in S$ et $M < a$ ce qui serait une contradiction du fait que M est un majorant de S; on a donc $\sup S = \sqrt{2}$.

5.) $S = \{x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^*\}$: S est borné; $\sup S = 1$ puisque $1 \in S$ et $x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$; $\inf S = 0$ car $0 < x_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ et $\forall \epsilon$ tq $0 < \epsilon < 1$, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} = x_n < \epsilon$ et donc $x_n \in S$ et $x_n < \epsilon$; ϵ n'est pas un minorant de S.

6.) $S = \{x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbf{N}^*\}$: S est borné; on a $\inf S = -1$ et $\sup S = \frac{1}{2}$, les deux nombres sont dans S.

2.3. (a) Notons $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ l'ensemble des entiers modulo 4. Donc on a par exemple $\bar{2} + \bar{3} = \bar{1}$. On a aussi $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$, ce qui contredit une des propriétés des corps que nous avons démontrée au cours.

(b) L'approche la plus élémentaire est de remplir les tables d'addition et de multiplication en utilisant les axiomes de corps (et l'indication! réfléchissez pourquoi l'indication implique $1 + 1 = 0 \ldots$).

Une façon plus concise et élégante est de définir un corps à l'aide des matrices suivantes

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où tous les coefficients sont dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (entiers modulo 2), avec l'addition et la multiplication standard des matrices.