

26.1. On pose $x = u^2$ avec $x \in [\pi^2/16, \pi^2/9]$ et $u \in [\pi/4, \pi/3]$. On obtient $dx = 2udu$ et

$$\begin{aligned} \int_{x=\pi^2/16}^{x=\pi^2/9} \cos(\sqrt{x}) dx &= 2 \int_{u=\pi/4}^{u=\pi/3} u \cos(u) du \stackrel{p.p.}{=} 2 \left[u \sin(u) \right]_{\pi/4}^{\pi/3} - 2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin(u) du \\ &= 2 \left[u \sin(u) + \cos(u) \right]_{\pi/4}^{\pi/3} = 1 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

26.2. Choisissons $a \in \mathbf{R}$ quelconque. On décompose $\text{Arctg}(t) = 1 \cdot \text{Arctg}(t)$ pour intégrer par parties:

$$\int_a^x \text{Arctg}(t) dt = \left[t \text{Arctg}(t) \right]_a^x - \int_a^x \frac{t}{1+t^2} dt = \left[t \text{Arctg}(t) - \frac{1}{2} \log(1+t^2) \right]_a^x$$

et donc une primitive est $x \text{Arctg}(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$.

26.3. (i) Posons $x = \sinh(t)$ avec $t \in [0, 1]$ et $x \in [0, \sinh(1)]$. On obtient $dx = \cosh(t)dt$ et

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{x=\sinh(1)} \sqrt{x^2+1} dx &= \int_{t=0}^1 \sqrt{\sinh^2(t)+1} \cdot \cosh(t) dt = \int_0^1 \cosh^2(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} dt = \left[\frac{1}{8} (e^{2t} - e^{-2t} + 4t) \right]_0^1 = \frac{1}{8} (e^2 - e^{-2} + 4) = \frac{1}{4} \sinh(2) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ii) Posons $x = \cosh(t)$ avec $t \in [0, 1]$ et $x \in [1, \cosh(1)]$.

Observons que $0 \leq \sinh(t) = \sqrt{\cosh^2(t) - 1}$ si $t \in [0, 1]$. On obtient $dx = \sinh(t)dt$ et

$$\begin{aligned} \int_{x=1}^{x=\cosh(1)} \sqrt{x^2-1} dx &= \int_{t=0}^1 \sqrt{\cosh^2(t)-1} \cdot \sinh(t) dt = \int_0^1 \sinh^2(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{4} dt = \left[\frac{1}{8} (e^{2t} - e^{-2t} - 4t) \right]_0^1 = \frac{1}{8} (e^2 - e^{-2} - 4) = \frac{1}{4} \sinh(2) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

26.4. Sachant que la dérivée de $\text{tg } x$ est $\frac{1}{\cos^2 x}$, on procède par intégration par parties:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)} dx = \left[x \text{tg } x \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \text{tg } x dx = \frac{\pi}{4} + \left[\log \cos x \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2.$$