25.1. Remarquant que la dérivée de $\cos^6(x)$ est $-6\cos^5(x)\sin(x)$, on a:

$$\int_0^{\pi/3} \cos^5(x)\sin(x)\,dx = \left[-\frac{1}{6}\cos^6(x)\right]_{x=0}^{\pi/3} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2^6}\right) = \frac{21}{128}.$$

25.2. Nous utilisons d'abord quelques résultats du cours comme suit:

Comme toute fonction continue est intégrable, f est intégrable sur $[1,2]$. Sur $[0,1]$, la fonction coïncide avec une fonction continue modifiée en un unique point, et donc f est intégrable sur $[0,1]$. Il suit que f est intégrable sur $[0,2]$.

Si $x<1$, nous avons $F(x)=0$. En utilisant à nouveau que l'intégrale n'est pas affectée si on change f en un point, on a encore $F(1)=0$. Pour $x>1$, nous avons

$$F(x) = \int_0^x f = \int_0^1 0\,dt + \int_1^x 1\,dt = 0 + [t]_{t=1}^{t=x} = x-1.$$

Nous voyons en particulier que F est continue mais non dérivable. Attention, ce denier point n'est pas à proprement parler une preuve du fait que f n'admette pas une primitive (autre). En revanche, le théorème de Darboux montre qu'une dérivée ne peut pas avoir une limite (à gauche) en 1 sans être continue (à gauche) en 1.

25.3. Choisissons $a>0$. On écrit $t\log\sqrt{t} = \frac{1}{2}t\log(t)$ et on intègre par parties:

$$\int_a^x t\log(t)\,dt = \frac{t^2}{2}\log t\Big|_a^x - \int_a^x \frac{t}{2}\,dt = \left[\frac{t^2}{4}(2\log t - 1)\right]_a^x$$

et donc une primitive est $\frac{x^2}{8}(2\log x - 1)$.

25.4. On pose $x^2=y$, $2x\,dx = dy$ et donc

$$\int_0^b x\sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} \sin y\,dy = -\frac{1}{2}\cos y\Big|_0^{b^2} = -\frac{1}{2}\cos b^2 + \frac{1}{2}.$$