

**24.1.** Par la densité des nombres irrationnels, on déduit que  $\underline{S}_\sigma(f) = 0$  pour toute subdivision  $\sigma$  car  $m_i = 0$  pour tout  $i$ . Il s'agit donc de démontrer que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe une subdivision  $\sigma$  de  $[0, 1]$  telle que  $\overline{S}_\sigma(f) < \epsilon$ .

Soit donc  $\epsilon > 0$ . Fixons un entier  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ . L'ensemble

$$A = \left\{ f^{-1}(x) \mid x \in \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \right\} \right\}$$

est fini. En effet, la pré-image de chaque point dans  $\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \right\}$  est finie. Nous pouvons donc énumérer  $A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$  pour un entier  $m$ .

Nous considérons à présent une subdivision  $\sigma$  de  $[0, 1]$  de pas plus petit que  $\frac{\epsilon}{2(m+1)}$ , i.e.  $x_i - x_{i-1}$  est borné par ce nombre  $\forall i$ .

Parmi les intervalles de  $\sigma$ , il y en a un certain nombre  $\ell$  qui contiennent un point (ou plus) parmi les  $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ ; noter que  $\ell \leq m + 1$ . La partie de la somme  $\overline{S}_\sigma(f)$  constituée des  $\ell$  termes correspondants est bornée par  $\frac{\epsilon}{2(m+1)} \cdot \ell$ . Le reste de la somme est bornée par  $\frac{1}{n+1}$  puisque  $f$  est bornée par ce nombre sur tout intervalle qui ne contient aucun élément de  $A$ .

On conclut donc bien  $\overline{S}_\sigma(f) < \frac{\epsilon}{2(m+1)} \cdot \ell + \frac{1}{n+1} < \epsilon$ .

**24.2.** Puisque  $x \geq x^2$  sur  $[0, 1]$ , l'aire entre ces deux fonctions s'obtient comme:

$$\int_0^1 x \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^1 - \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=0}^1 = \left( \frac{1}{2} - 0 \right) - \left( \frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

**24.3.** Par contraposée: supposons que  $g$  ne soit pas partout nulle. Il existe donc  $z \in [a, b]$  avec  $g(z) > 0$ . Par continuité, il existe  $a < x_1 < x_2 < b$  avec  $g \geq g(z)/2$  sur tout  $[x_1, x_2]$ . (Rédigez pour vous-même l'implication de ce fait à partir de la définition de continuité en  $z$ !)

Pour la subdivision  $\sigma = (x_0 = a, x_1, x_2, x_3 = b)$  nous avons  $\underline{S}_\sigma(g) \geq m_2(x_2 - x_1)$  puisque tous les  $m_i$  sont  $\geq 0$ . Donc

$$\int_a^b g = \underline{S}(g) \geq \underline{S}_\sigma(g) \geq m_2(x_2 - x_1) \geq \frac{g(z)}{2}(x_2 - x_1) > 0.$$

En revanche, une fonction nulle partout sauf en un point sera intégrable d'intégrale nulle.

**24.4.** La difficulté est que pour les sommes de Darboux, il n'est pas vrai que  $\underline{S}_\sigma(f+g) = \underline{S}_\sigma(f) + \underline{S}_\sigma(g)$  (même pour des fonctions continues, d'ailleurs). De même pour  $\overline{S}_\sigma$ .

Nous avons quand même  $m_i(f+g) \geq m_i(f) + m_i(g)$  par définition de l'infimum. On en déduit  $\underline{S}_\sigma(f+g) \geq \underline{S}_\sigma(f) + \underline{S}_\sigma(g)$  et donc  $\underline{S}(f+g) \geq \underline{S}(f) + \underline{S}(g)$ , c'est à dire  $\int_a^b (f+g) \geq \int_a^b f + \int_a^b g$ . En argumentant de la même manière avec les sommes supérieures et  $M_i(f+g) \leq M_i(f) + M_i(g)$ , on obtient la deuxième inégalité. (Ou alors, remplacer  $f$  et  $g$  par leurs opposées.)

**24.5.** Si  $g$  est identiquement nulle, il n'y a rien à montrer. Sinon: puisque  $g$  est continue et positive, on a  $\int_a^b g > 0$  grâce à l'exercice 3 de cette série.

On a aussi, des propriétés de l'intégrale

$$\int_a^b mg \leq \int_a^b (f \cdot g) \leq \int_a^b Mg$$

où  $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$  et  $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ .

On a ainsi:

$$m \leq \frac{\int_a^b (f \cdot g)}{\int_a^b g} \leq M.$$

Puisque  $f$  est continue sur  $[a, b]$  le théorème de la valeur intermédiaire nous dit qu'il existe  $c \in [a, b]$  tel que

$$\frac{\int_a^b (f \cdot g)}{\int_a^b g} = f(c),$$

d'où le résultat. Le cas particulier suit du choix  $g = 1$ .