

23.1. Sans corrigé.

23.2. Montrons que $\forall x \in]-1, 1[$:

$$\operatorname{Arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

On a

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = 1 + (\operatorname{tg} x)^2.$$

Puisque la fonction Arctg est la fonction réciproque de la fonction tg définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\operatorname{Arctg}(0) = 0$ et

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Arctg} x = \frac{1}{\frac{d}{dx} \operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} x)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{Arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Posons $f : \mathbf{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ définie par $f(x) = \operatorname{Arctg} x$. On a $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et si $|x| < 1$ et puisque

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

on aura

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Soit maintenant la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$. On vérifie facilement que son rayon de convergence est $R = 1$. Ainsi,

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

En zéro, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} 0^{2n+1} = 0$ et donc, puisque deux fonctions dérivables dont les dérivées coïncident et qui sont égales en un point sont égales partout (voyez-vous pourquoi?),

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

est la série de Taylor de $\operatorname{Arctg} x$.

La série numérique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

est une série alternée décroissante en valeur absolue et avec un terme général tendant vers 0, donc elle converge. Par le théorème d'Abel, et puisque la fonction Arctg est continue au point 1, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = \operatorname{Arctg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

23.3. Pour commencer, on montre par récurrence sur n la formule

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

À ce stade du cours on vous fait confiance que vous savez faire ça — mais faites-le quand même...

Notons $f(x) = x^2$. Pour un n donné, considérons la subdivision σ de $[0, b]$ définie par

$$(x_0 = 0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n = b), \quad \text{où} \quad x_i = \frac{ib}{n}.$$

Nous avons donc $M_i = (ib/n)^2$ et $m_i = ((i-1)b/n)^2$ puisque f est croissante sur $[0, b]$. Par ailleurs, $x_i - x_{i-1} = b/n$ pour tout i . Donc la somme de Darboux supérieure est

$$\sum_{i=1}^n M_i \frac{b}{n} = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^n i^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{2n^3}.$$

Quand $n \rightarrow \infty$, cette fraction converge vers $b^3/3$.

Pour ce qui concerne la somme de Darboux inférieure, on a un calcul très similaire:

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{b}{n} = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^n (i-1)^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{2n^3},$$

qui converge aussi vers $b^3/3$.

En conclusion, nous avons montré à la fois que la fonction est intégrable, et que son intégrale vaut $b^3/3$.