22.1. Calculons le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n$.

Si on considère la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, on a vu que son rayon de convergence est donné par $R = 1$ et si $|x| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

En utilisant d/dx pour dénoter la dérivée d'une fonction de x, on obtient que pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2},$$

avec un rayon de convergence $R = 1$.

22.2. On considère $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$. Son rayon de convergence est également R puisque, d'après l'exercice 7.2 du 30 septembre, on sait que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Le théorème sur la dérivation des séries entières donne donc $F' = f$.

L'exercice dit "des fonctions" car le terme constant de F peut être choisi arbitrairement; par exemple, la fonction F choisie ci-dessus a le coefficient constant 0: en effet a_0 n'est pas le coefficient de x^0, mais le coefficient de x^1 pour $F(x)$

22.3. Nous avons montré que toute série entière définit une fonction continue (en particulier). Puisque $\cos(0) = 1$ par définition de la série, la continuité donne donc un voisinage où $\cos(x) > 0$. Les règles de dérivation impliquent $\mathrm{tg}' = (\sin^2 + \cos^2)/\cos^2$. Cela implique que tg' est positive sur son domaine de définition et donc tg est croissante.

Notez que nous avons prouvé en cours que $\sin^2 + \cos^2 = 1$; donc on peut simplifier l'expression de tg' pour trouver $1/\cos^2$.

22.4. Nous savons que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, et donc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^2 = 1$. Il en suit que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ est $R = 1$.

On considère à présent la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; on a vu que son rayon de convergence est aussi 1 et que pour $|x| < 1$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

En utilisant d/dx pour dénoter la dérivée d'une fonction de x, on obtient que pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2},$$

On obtient que pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{x+1}{(1-x)^3}.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, x^{n-1} = x \cdot \frac{x+1}{(1-x)^3},$$

avec un rayon de convergence $R = 1$.