

21.1. L'idée est que si l'on développe naïvement ce produit, on trouve $\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x^n y^m}{n! m!}$ et donc en re-

groupant tous les termes selon la puissance "totale" $p = n+m$ de x et de y , on a $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^p \frac{x^n y^{p-n}}{n! (p-n)!}$.

Or, la formule du binôme de Newton montre que cette dernière expression est bien égale à $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x+y)^p}{p!}$.

Pour rédiger votre preuve rigoureuse, une possibilité est la suivante: commencez par fixer $\epsilon > 0$, approchez le membre de gauche par une somme partielle qui en diffère de moins de ϵ , appliquez le raisonnement ci-dessus pour les sommes finies, et finalement expliquez pourquoi le membre de droite tronqué converge bien vers $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x+y)^p}{p!}$. Votre correcteur vérifiera que vous avez bien une version rédigée rigoureusement et en détail!

21.2. (a) Puisque $|x| < R_1, R_2$, les séries $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $t = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergent absolument. Cela signifie que les suites de sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^N |a_n x^n|$ et $T_M = \sum_{m=0}^M |b_m x^m|$ sont bornées. En observant que

$$\sum_{n=0}^N |c_n x^n| \leq \sum_{j,k=0}^{j=N,k=N} |a_j b_k x^{k+j}| = S_N T_N,$$

il suit que les sommes partielles U_N de $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ sont bornées, i.e. $u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolument, CQFD.

(b) Prouvons $u = st$. Notons s_N, t_N, u_N les sommes partielles. La différence entre les sommes (finies!) $s_N t_N$ et u_N consiste en tous les termes $a_j b_k x^{k+j}$ avec $j, k \leq N$ mais $j+k > N$. Elle est donc bornée en valeur absolue par $U_{2N} - U_N$, qui tend bien vers zéro puisque u converge absolument.

(c) Le point précédent montre que le rayon de convergence R_3 de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ satisfait $R_3 \geq \min(R_1, R_2)$. Mais cette inégalité peut être stricte. Un exemple extrême est si une des deux séries s'annule!

21.3. (Sans corrigé)