

20.1. Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit $h \neq 0$. Puisque f est convexe, on a, si $\lambda \in [0, 1]$:

$$f\left(\lambda(x-h) + (1-\lambda)(x+h)\right) \leq \lambda f(x-h) + (1-\lambda)f(x+h).$$

En prenant $\lambda = \frac{1}{2}$, on obtient

$$f(x) \leq \frac{1}{2}f(x-h) + \frac{1}{2}f(x+h),$$

et par suite

$$\frac{f(x-h) + f(x+h) - 2f(x)}{h^2} \geq 0.$$

L'exercice 18.1 du 13 novembre nous permet de conclure que $f''(x) \geq 0$.

20.2. D'après un résultat du cours (mais appliqué à f' cette fois-ci), f' est une fonction croissante. Il s'agit de démontrer que pour tous $a < b$ et tout $0 < \lambda < 1$ on a $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$. (Si vous comparez à la définition de la série précédente, observez que $\lambda = 0, 1$ sont des cas triviaux.) En appliquant le TAF à f sur $[a, x]$ on obtient $a < c < x$ tel que $f'(c)(x-a) = f(x) - f(a)$. En l'appliquant à nouveau mais sur $[x, b]$ on obtient $x < c' < b$ tel que $f'(c')(b-x) = f(b) - f(x)$. Si on exprime $f(a)$ respectivement $f(b)$ à l'aide de ces équations, on obtient

$$\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) = f(x) - \lambda f'(c)(x-a) + (1-\lambda)f'(c')(b-x).$$

En substituant encore $x-a = (1-\lambda)(b-a)$ et $b-x = \lambda(b-a)$ on obtient

$$\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) = f(x) + (1-\lambda)\lambda(b-a)(f'(c') - f'(c))$$

et cette dernière quantité est bien $\geq f(x)$ car $f'(c') - f'(c) \geq 0$ puisque f' est croissante.

20.3. (i) Pour $n \in \mathbf{N}$, nous utilisons la règle de Bernoulli–L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n-1}}{\exp(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0$$

puisque le dénominateur tend vers $+\infty$.

(ii) Pour $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_0$, nous observons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{\exp(x)} = \sum_{0 \leq i \leq n} \lim_{x \rightarrow \infty} a_i \frac{x^i}{\exp(x)} = 0$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) \rightarrow \pm\infty$, nous déduisons

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x) \exp(x)} = 0$$

(iii) Nous observons que

$$\frac{d}{dx} \exp(-x) \exp(x) = 0$$

donc

$$\exp(-x) = \frac{c}{\exp(x)}$$

pour $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. (On verra en cours que $c = 1$.) Pour cette raison, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Donc f est continue en 0.

Nous utilisons le théorème de Darboux:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{2c}{x^3 \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)} = 0 \end{aligned}$$

(De même pour $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f'(x)$.)

(iv) Nous appliquons plusieurs fois le théorème de Darboux et nous calculons:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f^{(2)}(x) &= \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left(-\frac{(6x^2 - 4)c}{x^6 \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f^{(3)}(x) &= \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \left(-\frac{(24x^4 - 36x^2 + 8)c}{x^9 \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right) = 0 \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

etc.

Notez qu'il n'est pas nécessaire (ni désirable!!) de calculer ces formules, ce qui compte est d'observer par récurrence qu'elles s'annulent en zéro.