1.1.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{2025} n \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{2025} \big((n-1)+1\big) \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{2025} (n-1) \cdot 2^n + \sum_{n=1}^{2025} 2^n \\ &= 2 \cdot \sum_{n=1}^{2024} n 2^n + \sum_{n=1}^{2025} 2^n = 2 \sum_{n=1}^{2025} n2^n - 2 \cdot 2025 \cdot 2^{2025} - 2 + 2^{2026}. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$.

Ainsi

$$S = 2S - 2025 \cdot 2^{2026} - 2 + 2^{2026} = 2S - 2024 \cdot 2^{2026} - 2.$$

Si on résout cette equation selon S, on obtient donc $\underline{S = 2024 \cdot 2^{2026} + 2}$, ce qui est quand même plus intelligible (et intelligent) que l'expression décimale du nombre en question!

1.2. À rendre!

1.3. On cherche une solution $x \in \mathbf{R}$ de $x^2 + x + 1 = 0$. On observe que cette solution ne peut pas être $x = 0$, puisque $1 \neq 0$.

On a alors, pour $0 \neq x \in \mathbf{R}$:

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1 - x^2$$

ainsi que

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1 - 1/x.$$

On a aussi:

$$\Big((x = -1 - x^2) \text{ et } (x = -1 - 1/x)\Big) \quad \Longrightarrow \quad -1 - x^2 = -1 - 1/x.$$

On a ici "implique" et pas "équivalent". Source de l'erreur: une solution de la relation de droite n'est pas nécessairement solution de la relation de gauche. Et $x = 1$ est bien solution de $-1-x^2 = -1 - 1/x$, mais pas de $x^2 + x + 1 = 0$.
En effet, $x = 1$ satisfait $(-2)x = -1 - x^2$ et $(-2)x = -1 - 1/x$.