19.1. Si $f \in C^2(\mathbf{R})$ et si $x \in \mathbf{R}$, on peut considérer les développements limités:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + \frac{f''(x+\theta h)}{2!}\,h^2, \quad \forall h \in \mathbf{R},$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)\,h + \frac{f''(x+\tilde{\theta} h)}{2!}\,h^2, \quad \forall h \in \mathbf{R},$$

où θ et $\tilde{\theta}$ sont des fonctions de h telles que $|\theta| < 1$ et $|\tilde{\theta}| < 1$.
Ainsi on obtient, si $h \neq 0$:

$$\left|\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - f''(x)\right| \leq \frac{1}{2}\left|f''(x+\theta\,h) - f''(x)\right| + \frac{1}{2}\left|f''(x+\tilde{\theta}\,h) - f''(x)\right|.$$

Puisque f'' est continue, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left|f''(x+\theta\,h) - f''(x)\right| \leq \epsilon, \quad \text{si} \quad |h| \leq \delta,$$
$$\left|f''(x+\tilde{\theta}\,h) - f''(x)\right| \leq \epsilon, \quad \text{si} \quad |h| \leq \delta.$$

On obtient ainsi, si $0 < |h| \leq \delta$:

$$\left|\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - f''(x)\right| \leq \epsilon,$$

ce qui prouve que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

19.2. Les dérivées successives $\cos^{(k)}$ de cos sont, pour $k = 0, 1, \ldots, 6, \ldots$

$$\cos, -\sin, -\cos, \sin, \cos, -\sin, -\cos, \ldots$$

Donc pour (i) le DL d'ordre 6 en $a = 0$ est

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + r(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{r(x)}{x^6} = 0$. Remarquez que les termes impairs "manquent" simplement parce que les dérivées d'ordre impair sont $\pm \sin$, qui s'annule en 0.

De même, pour (ii) le DL d'ordre 3 en $a = 1$ est

$$\cos(x) = \cos(1) - \sin(1)(x-1) - \frac{\cos(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{\sin(1)}{3!}(x-1)^3 + r(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{r(x)}{(x-1)^3} = 0$. Cette fois tous les termes apparaissent.

19.3. Le point (i) de l'exercice précédent donne en particulier un DL d'ordre 2 de la forme

$$\cos(y) = 1 - \frac{1}{2!}y^2 + r(y)$$

avec $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{r(y)}{y^2} = 0$. On en déduit, en posant $y = x^6$ et $\tilde{r}(x) = r(x^6)$, la relation

$$\cos(x^6) = 1 - \frac{1}{2!}x^{12} + \tilde{r}(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tilde{r}(x)}{x^{12}} = 0$. On a donc trouvé un DL d'ordre 12 pour la fonction $x \mapsto \cos(x^6)$.

On obtient donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x^6)}{x^{12}} = \dfrac{1}{2}$.