

18.1. Il s'agit d'une limite de la forme "0/0", à savoir $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{\psi(h)}$ pour $\varphi(h) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$ et $\psi(h) = h^2$.

On observe d'abord que la dérivation en chaîne donne $\varphi'(h) = f'(x+h) - f'(x-h)$, et donc $\varphi'(0) = 0$. Comme $\psi'(h) = 2h$, on a donc à nouveau "0/0", et on applique une deuxième fois Bernoulli-L'Hôpital. Puisque $\varphi''(h) = f''(x+h) + f''(x-h)$ et $\psi''(h) = 2$, on conclut que la limite vaut bien $f''(x)$.

18.2. Puisque $x < y < z$, on a $\frac{z-y}{z-x} \in]0, 1[$. Posons donc $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$. On obtient $1 - \lambda = \frac{y-x}{z-x}$ et on a bien

$$y = \lambda x + (1 - \lambda)z.$$

Puisque f est convexe, on a $f(y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(z)$ et ainsi

$$f(y) \leq \frac{z-y}{z-x}f(x) + \frac{y-x}{z-x}f(z).$$

On obtient donc

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \left(\frac{z-y}{(z-x)(y-x)} - \frac{1}{y-x} \right) f(x) + \frac{1}{z-x} f(z) = \frac{f(z) - f(x)}{z-x}. \quad (1)$$

De même, on aura

$$\frac{f(y) - f(z)}{z - y} \leq \frac{1}{z-x} f(x) + \left(\frac{y-x}{(z-x)(z-y)} - \frac{1}{z-y} \right) f(z) = \frac{f(x) - f(z)}{z-x} \quad (2)$$

En résumé, (1) et (2) impliquent

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

18.3. Si $x = y$, la relation donnée par l'indication est évidente. Si $x < y$, on a trois situations possibles:

$$x_0 < x < y \quad \text{ou} \quad x < x_0 < y \quad \text{ou} \quad x < y < x_0.$$

Dans les trois cas on vérifie en utilisant l'exercice 2 que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}.$$

Posons pour $x \neq x_0$,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

On a donc montré que g est définie sur $I - \{x_0\}$ et que g est croissante. De plus, g est bornée au voisinage de x_0 ; en effet, il existe $\delta > 0$ tel que $V = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\} \subset I$ et en posant $M = g(x_0 - \delta)$ et $\bar{M} = g(x_0 + \delta)$, puisque g est croissante sur I , on a

$$M \leq g(x) \leq \bar{M}, \quad \forall x \in V.$$

En utilisant l'exercice 11.1 du 14 octobre, on a

$$\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} x_0} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \underset{>}{\rightarrow} x_0} g(x) \quad \text{existent.}$$

Ainsi, $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent. De plus on a, si $x \neq x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

et puisque $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent, alors on a

$$\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} x_0} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\rightarrow} x_0} f(x) = f(x_0)$$

ce qui montre que f est continue en x_0 .