17.1. Puisque f est dérivable sur $]a, b[$, elle est continue sur $]a, b[$.

On commence par noter une valeur arbitraire v de f, i.e. in chosit $z \in]a, b[$ quelconque et on pose $v = f(z)$.

A présent, puisque $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = +\infty$, il existe $0 < \delta < \frac{b-a}{4}$ tel que

$$\forall x : \ x \in]a, a+\delta] \text{ ou } x \in [b-\delta, b[\implies f(x) > v.$$

En particulier, z appartient à l'intervalle ouvert $]a+\delta, b-\delta[$.

Par continuité de f sur $[a+\delta, b-\delta]$, il existe un minimum sur cet intervalle, donc $c \in [a+\delta, b-\delta]$ avec $f(c)$ minimal pour cet intervalle. Notez que c doit appartenir à l'intervalle ouvert $]a+\delta, b-\delta[$ puisque $f(c) \leq f(z) = v$. Il suit donc que c est un point critique: $f'(c) = 0$.

Ceci montre l'exercice si $p = 0$. Dans le cas général, on applique l'argument précédent à la fonction $g(x) = f(x) - px$ après avoir vérifié que cette dernière conserve toutes les hypothèses faites sur f.

17.2.

- Puisque f est dérivable, elle est continue.
- Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \ell > 0$, il existe $M > 0$ tel que $f'(x) \geq \frac{\ell}{2} > 0$, $\forall x \geq M$. Ainsi f est croissante sur $]M, +\infty[$.
- Ab absurdo, si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \neq +\infty$, alors f est bornée sur $[M, +\infty[$ (puisqu'elle est croissante!) et on a donc $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$.
- Pour tout $x \in [M, +\infty[$, par le théorème des accroissements finis, il existe alors $\xi = \xi(x) \in]x, x+1[$ tel que

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f'(\xi).$$

- En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $0 = \dfrac{\alpha - \alpha}{1} = \ell$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\ell > 0$.