

16.1. “ \implies ”: Si f est dérivable alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a),$$

et par suite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}.$$

Par ailleurs, puisque $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow -h \rightarrow 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a+h)}{-h} = f'(a).$$

Donc la limite considérée est bien $\frac{1}{2}f'(a) + \frac{1}{2}f'(a) = f'(a)$.

“ \impliedby ”: En revanche, l'existence de cette dernière limite n'entraîne pas celle de $f'(a)$. Voici en effet un contre-exemple : $f(x) = |x|$ et $a = 0$. Vérifiez que c'est bel et bien un contre-exemple...

16.2. Nous définissons $g(x) = f(x) - f(x + \pi)$; le but est de trouver x avec $g(x) = 0$. On observe que

$$g(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0) = -(f(0) - f(\pi)) = -g(0).$$

Donc 0 est une valeur intermédiaire entre $g(0)$ et $g(\pi)$. Puisque g est une fonction continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il y a un point $x \in [0, \pi]$ tel que $g(x) = 0$.

16.3. Si $0 \neq x \in [-1, 1]$, on a $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$.

D'autre part,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 0.$$

De plus, il n'y a pas de problème aux points $x = 1$ et $x = -1$. Ainsi, $f' \in C^0([-1, 1])$ et donc $f \in C^1([-1, 1])$.

Si $0 \neq x \in [-1, 1]$, on a $f''(x) = 6x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x)$ n'existe pas. La fonction f n'est donc pas dans $C^2([-1, 1])$. En effet, sans même se demander s'il y a une dérivée en $x = 0$, on voit que f'' ne peut pas être continue en ce point.

En conclusion, $f \in C^0([-1, 1])$ et $f \in C^1([-1, 1])$, mais $f \notin C^m([-1, 1])$ si $m \geq 2$.