15.1. À rendre. En bref: Pour (i), poser $\delta = \epsilon/L$. L'unicité (iii) vient du fait que si l'on avait deux points fixes distincts, on aurait immédiatement une contradiction de la définition de Lipschitz puisque $L < 1$.
L'existence (ii) est le point intéressant, et se démontre ainsi. On construit une suite (x_n) dans $\mathbf{R}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$, avec $x_0 \in \mathbf{R}$. Utilisant Lipschitz, on montre par récurrence sur n que la distance entre x_{n+1} et x_n est $\leq L^n|x_1 - x_0|$. On compare alors avec la série géométrique de raison L pour montrer que la suite est de Cauchy: cette méthode a été utilisée au cours pour un exemple. La suite converge donc vers un point x. On obtient alors que x est le point fixe par continuité de f (voyez-vous pourquoi?).

15.2. (a) f est dérivable en zéro car $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

(b) f n'est pas dérivable sur $\mathbf{R}^*$. On montre pour cela que f n'est pas continue en $x_0 \neq 0$. En effet, pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^*$, on peut construire une suite $(a_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ et une suite $(b_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbf{Q}$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0 \in \mathbf{R}^*,$$

Par densité des nombres irrationnels respectivement rationnels. Puisque

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = x_0^3 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(b_n),$$

on en déduit que la fonction f n'est pas continue en x_0.

15.3. (i) Les propriétés vues au cours s'appliquent sans problème:

$$f'(x) = \frac{1 + x^4 - x\,4x^3}{(1 + x^4)^2} = \frac{1 - 3x^4}{(1 + x^4)^2}.$$

(ii)

- Si $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, alors il existe $z \in \mathbf{Z}$ tel que $x \in]z, z + 1[$. Ainsi $f(x) = x^2 z$ et

$$f'(x) = 2zx = 2[x]\,x \text{ pour tout } x \in]z, z + 1[.$$

- Si $x = 0$ on a $f(0) = 0$. Par ailleurs, si x est dans un voisinage suffisamment petit de 0, alors $f(x) = 0$ ou $f(x) = -x^2$ selon le signe de x. Il en suit que $\lim_{x\to 0} f(x)/x = 0$ et donc $f'(0) = 0$.

- Si $z \in \mathbf{Z}^*$ alors $\lim_{\substack{x\to z \\ x<z}} f(x) = z^2\,(z - 1)$ et $\lim_{\substack{x\to z \\ x>z}} f(x) = z^3$.
Ainsi f n'est pas continue en z et donc $f'(z)$ n'existe pas.

En résumé : $f'(x) = 2[x]x$ si $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^*$ et cette formule reste correcte dans le cas spécial $x = 0$; par contre, $f'(x)$ n'existe pas si $x \in \mathbf{Z}^*$.