14.1. (sans correction)

14.2. Posons $E = \{x \in [a, b] \text{ tel que } f(x) \leq x\}$. Puisque $f(b) \leq b$, on a que $b \in E$ et donc $E \neq \varnothing$. En outre, $x \in E \Rightarrow a \leq x$; E est donc minoré par a. On peut alors poser $c = \inf E$. Montrons que c est le point fixe cherché. Clairement $c \in [a, b]$ et on a soit $c = f(c)$, soit $c > f(c)$, soit $c < f(c)$.

(a) Supposons que $c < f(c)$. On a donc $a \leq c < f(c) \leq b$, ainsi que $c \notin E$ puisque $f(c) > c$. Par les propriétés de l'inf, il existe $d \in E$ tq $c < d < f(c)$.
Puisque f est croissante, on a $f(c) \leq f(d)$, et avec $d < f(c)$, il vient $d < f(d)$. Ce qui contredit le fait que $d \in E$.

(b) Supposons maintenant que $c > f(c)$. On a donc $a \leq f(c) < c \leq b$. Soit d tel que $f(c) < d < c$. Puisque $d < c = \inf E$, $d \notin E$. Puisque f est croissante, on a $f(d) \leq f(c)$ et donc $f(d) < d$ et alors $d \in E$. Contradiction.

(c) Il reste donc $c = f(c)$, donc c est un point fixe.

Le résultat est faux si f est décroissante. En effet, la fonction $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{si} \quad 0 \leq x < 1/2, \\ 1/4, & \text{si} \quad 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

n'a pas de point fixe dans $[0, 1]$.

14.3. (i) Montrons que $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}, \quad \forall x \in [0, 1]$.

- Commençons par montrer par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}, \quad \forall x \in [0, 1]$.

  Puisque $P_0(x) = 0,\ \forall x \in [0, 1]$, on a $0 \leq P_0(x) \leq \sqrt{x},\ \forall x \in [0, 1]$. Supposons donc que pour $n \geq 0$ on ait

  $$0 \leq P_j(x) \leq \sqrt{x}, \qquad \forall x \in [0, 1], \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

  et montrons que

  $$0 \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x},\ \forall x \in [0, 1].$$

  En utilisant la définition de P_{n+1} on a $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x))\right)$.
  Puisque par hypothèse de récurrence on a $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x},\ \forall x \in [0, 1]$, les facteurs

  $$\sqrt{x} - P_n(x) \text{ et } \left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right)\right),$$

  sont non négatifs pour tout $x \in [0, 1]$. Ainsi $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geq 0,\ \forall x \in [0, 1]$, ce qui montre que $P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$. De façon évidente, puisque $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, on a $P_{n+1}(x) \geq 0,\ \forall x \in [0, 1]$ qui découle de la définition de P_{n+1}.
- Puisque $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x},\ \forall x \in [0, 1]$, on a $(x - P_n^2(x)) \geq 0$ et donc

  $$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \geq P_n(x),\ \forall x \in [0, 1].$$

  Ainsi, la suite $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ est croissante.

(ii) Si $x \in [0,1]$ est fixé, la suite $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ est une suite numérique croissante et bornée par $\sqrt{x}$. Elle est donc convergente et on pose

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$

On obtient ainsi $f(x) = f(x) + \frac{1}{2}\left(x - f^2(x)\right)$, ce qui implique $f^2(x) = x$ et donc $f(x) = \sqrt{x}$ (le signe $-$ est à exclure car $P_n \geq 0$).
Ainsi $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite croissante de fonctions continues sur $[0,1]$ qui converge ponctuellement vers la fonction continue $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Le théorème de Dini permet de conclure que $\lim_{n\to\infty} P_n = f$ uniformément sur $[0,1]$.

(iii) La fonction $g : [-1,1] \to \mathbf{R}$ est définie par $g(x) = |x|$ (fonction paire). Puisque $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \sqrt{x}$ uniformément sur $[0,1]$, on a $\lim_{n\to\infty} P_n(x^2) = |x|$ uniformément sur $[-1,1]$ et $P_n(x^2)$ est un polynôme.