

13.1. Notons d'abord que f est continue. Le but de l'exercice est d'entraîner la continuité uniforme d'après les définitions, mais on peut aussi le déduire de l'exercice 13.2 ci-dessous à condition de justifier que les deux limites existent, ce qu'on peut faire. Mais voici la preuve explicite sans cette astuce:

En posant $g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $g(0) = 0$, on peut voir que g est continue sur $[0, +\infty[$. Ainsi g est continue sur $[0, 2]$ et donc g est uniformément continue sur $[0, 2]$, ce qui implique que pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta_1 > 0$ ($\delta_1 < 1$) tel que

$$\text{si } x, y \in]0, 2], |x - y| \leq \delta_1 \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Montrons que f est uniformément continue sur $[1, +\infty[$. En effet si $x, y \in [1, +\infty[$ on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| x \sin(1/x) - y \sin(1/y) \right| \\ &\leq \left| (x - y) \sin(1/x) \right| + \left| y (\sin(1/x) - \sin(1/y)) \right| \\ &\leq |x - y| + y \left| \sin(1/x) - \sin(1/y) \right| \\ &\leq |x - y| + y \left| 2 \sin\left(\frac{1/x - 1/y}{2}\right) \cos\left(\frac{1/x + 1/y}{2}\right) \right| \\ &\leq |x - y| + 2y \left| \sin\left(\frac{y - x}{2xy}\right) \cos\left(\frac{y + x}{2xy}\right) \right|. \end{aligned}$$

Puisque $|\sin z| \leq |z|$ et $|\cos z| \leq 1$, $\forall z \in \mathbf{R}$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| + 2y \frac{|x - y|}{2xy} = |x - y| \left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq 2|x - y|.$$

En posant $\delta_2 = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, 1\right)$, on a

$$\text{si } x, y \in [1, +\infty[, |x - y| \leq \delta_2 \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Enfin en posant $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ on a

$$\text{si } x, y \in]0, +\infty[, |x - y| \leq \delta \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarquons que si $x, y \in]0, +\infty[$ vérifient $|x - y| \leq 1$, on a forcément ($x \in [0, 2]$ et $y \in [0, 2]$) ou bien ($x \in [1, +\infty[$ et $y \in [1, +\infty[$). En effet, supposons par l'absurde que $x \in [0, 2] \setminus [1, +\infty[$ et $y \in [1, +\infty[\setminus [0, 2]$. Ceci implique $x < 1$ et $y > 2$ et donc $|x - y| > 1$, ce qui est une contradiction.

13.2. (i) Soient $a \in \mathbf{R}$ et $f:]a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_2.$$

Montrons que f est uniformément continue.

Soit $\epsilon > 0$.

- Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell_2$, il existe $\beta > a$ tel que $\forall t \geq \beta, |f(t) - \ell_2| \leq \frac{\epsilon}{4}$.
On en tire alors que $\forall x, y \geq \beta, |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
- Puisque $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell_1$, la fonction f se prolonge par continuité à droite en a . Ainsi, f est uniformément continue sur $]a, \beta]$ et il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in]a, \beta]$ avec $|x - y| \leq \delta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
- Pour $a < x \leq \beta \leq y$ avec $y - x \leq \delta$, on a:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(\beta)| + |f(\beta) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Finalement, $\forall x, y \in]a, +\infty[$ avec $|x - y| \leq \delta$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$, ce qui montre que f est uniformément continue sur $]a, +\infty[$.

(ii) $f(x) = \frac{1}{x - a}$.

(iii) $f(x) = x^2$.

13.3. (a) En prenant $\epsilon = 1$, par continuité uniforme, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq 1$ si $|x - y| \leq \delta, x, y \in [0, +\infty[$.

(b) Si $n \in \mathbf{N}$ on a en utilisant le point (a),

$$|f(n\delta) - f(0)| \leq |f(n\delta) - f((n-1)\delta)| + |f((n-1)\delta) - f((n-2)\delta)| + \dots + |f(\delta) - f(0)| \leq n.$$

(c) Si $x \in [0, +\infty[$ et si $m = \lfloor \frac{x}{\delta} \rfloor$, on a $|x - m\delta| \leq \delta$ et donc $|f(x) - f(m\delta)| \leq 1$. Ainsi

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(m\delta)| + |f(m\delta)| \leq 1 + |f(m\delta)| \leq 1 + m + |f(0)| \leq 1 + \frac{x}{\delta} + |f(0)|.$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = \frac{1}{\delta}$ et $\beta = 1 + |f(0)|$.