12.1. (i) L'hypothèse signifie qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que les inégalités $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ soient valides pour tout x avec $0 < |x - a| < \epsilon$.

(ii) Le théorème qui établit une traduction entre limites de suites et limites de fonctions montre que les hypothèses impliquent le fait suivant. Soit (a_n) une suite qui converge vers a avec $a_n \neq a$ pour tout n; alors $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$ et $\lim_{n\to\infty} h(a_n) = \ell$.

Le même théorème montre que la conclusion désirée est que toute telle suite (a_n) satisfasse aussi $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \ell$. Ainsi, le théorème des deux gendarmes "saison 1" (pour les suites) implique donc bien que nos hypothèses impliquent la conclusion cherchée.

En effet, le point (i) vérifie bien que $f(a_n) \leq g(a_n) \leq h(a_n)$ pour tout n avec $|a_n - a| < \epsilon$, et la convergence de (a_n) vers a montre que cela est valide pour tout n assez grand.

12.2. (a) On a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, ce qui implique $f(0) = 0$.

(b) Si $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, on a

$$f(x_n + a) = f(x_n) + f(a) \Rightarrow f(x_n) = f(x_n + a) - f(a).$$

On pose $a_n = x_n + a$ et puisque $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Comme f est continue en a, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(f(a_n) - f(a)\Big) = 0 = f(0).$$

Ainsi f est continue en $x = 0$.

(c) Si $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ converge vers $b \in \mathbf{R}$, on a

$$f(b_n) = f(b_n - b + b) = f(b_n - b) + f(b) \Rightarrow f(b_n) - f(b) = f(b_n - b).$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} (b_n - b) = 0$ et f est continue en $x = 0$, on conclut que

$$\lim_{n\to\infty} (f(b_n) - f(b)) = 0.$$

(d) Si $n \in \mathbf{N}^*$ on a

$$f(n) = f(n-1) + f(1) = f(n-2) + 2\, f(1) = \ldots = f(0) + n\, f(1) = n\, f(1).$$

De même on a $f(-n) = -n\, f(1)$. Ainsi $\forall z \in \mathbf{Z}$ on a $f(z) = z\, f(1)$.
Si $x \in \mathbf{Q}$ on a $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{Z}$, $q \neq 0$ et

$$pf(1) = f(p) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = f\Bigg(\underbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}}_{q \text{ fois}}\Bigg) = q\, f\left(\frac{p}{q}\right) = q\, f(x).$$

Ainsi $f(x) = x\, f(1),\ \forall x \in \mathbf{Q}$. La fonction g définie par $g(x) = x\, f(1)$ est trivialement continue et de $f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbf{Q}$, on a $f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbf{R}$ par densité de $\mathbf{Q}$.
Ainsi

$$f(x) = x\, f(1),\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Concernant la remarque algébrique:

Voici un exemple de fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$ mais pour laquelle il n'est pas vrai que $f(x) = x\,f(1)$ pour tout x.

Puisque $\mathbf{R}$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{Q}$, il admet une $\mathbf{Q}$-base. Cette base contient au moins deux vecteurs $b \neq b'$ puisque sinon on aurait $\mathbf{R} = \mathbf{Q}$, ce qui n'est pas le cas. (En réalité on peut montrer que la base est non dénombrable.)

On définit à présent l'application linéaire $f : \mathbf{R} \to \mathbf{Q}$ (*linéaire pour le corps* $\mathbf{Q}$*, non pas* $\mathbf{R}$*!*) en définissant $f(x)$ comme le coefficient de x en b dans la base choisie.

Puisque f est linéaire sur $\mathbf{Q}$, elle satisfait bien $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}$. Par ailleurs, f n'est pas injective puisque $f(b') = 0 = f(0)$.

Donc il n'est pas vrai que $f(x) = x\,f(1)$ pour tout x.