11.1. Il existe $\delta > 0$ tq f est définie et croissante sur $[x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \delta]$. Et donc, pour x dans $[x_0 - \delta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \delta]$, on a $f(x_0 - \delta) \leq f(x) \leq f(x_0 + \delta)$ ce qui signifie que f est bornée sur $[x_0 - \delta, x_0[$ et sur $]x_0, x_0 + \delta]$.

(a) Puisque $f\big|_{]x_0-\delta,x_0[}$ est bornée, il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $\ell = \sup_{x\in]x_0-\delta,x_0[} f(x)$.
Pour tout $\epsilon > 0$ donné, il existe $\alpha \in]x_0 - \delta, x_0[$ tel que

$$\ell \geq f(\alpha) \geq \ell - \epsilon.$$

Et puisque $f\big|_{]x_0-\delta,x_0[}$ est croissante, on a

$$\ell \geq f(x) \geq f(\alpha) \geq \ell - \epsilon, \;\; \forall x \in [\alpha, x_0[.$$

Par suite $|f(x) - \ell| \leq \epsilon$ pour tout $x \in [\alpha, x_0[$. On obtient donc, puisque ϵ est quelconque,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \ell.$$

(b) Puisque $f\big|_{]x_0,x_0+\delta[}$ est bornée, il existe $m \in \mathbf{R}$ tel que $m = \inf_{x\in]x_0,x_0+\delta[} f(x)$.
Pour tout $\epsilon > 0$ donné, il existe $\beta \in]x_0, x_0 + \delta[$ tel que

$$m \leq f(\beta) \leq m + \epsilon.$$

Et puisque $f\big|_{]x_0,x_0+\delta[}$ est croissante, on a

$$m \leq f(x) \leq f(\beta) \leq m + \epsilon, \;\; \forall x \in]x_0, \beta[$$

ce qui prouve que $|f(x) - m| \leq \epsilon$, $\forall x \in]x_0, \beta[$ et par suite

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = m.$$

11.2. (i) Comme le dénominateur ne s'annule pas en $x = 2$, le calcul de cette limite est direct :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x-1}{3x^2-2} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^3+2x-1)}{\lim_{x\to 2}(3x^2-2)} = \frac{(\lim_{x\to 2} x)^3 + 2\lim_{x\to 2} x - 1}{3(\lim_{x\to 2} x)^2 - 2} = \frac{2^3+2\cdot 2-1}{3\cdot 2^2-2} = \frac{11}{10}$$

grâce aux règles de calcul pour les limites de fonctions.

(ii) En observant que le dénominateur divise le numérateur, on a

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left(x^2+2x+2\right) = 5.$$

(iii) On utilise la formule $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ avec $a = \sqrt[3]{x+1}$ et $b = \sqrt[3]{x}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left((x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\right)\left((x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} = 0\,.\end{aligned}$$

(iv) En utilisant que $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$, on peut réécrire le numérateur comme $\cos(x)^2 - \sin(x)^2 - 1 = -2\sin(x)^2$ et la limite devient

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(x)^2}{\sin(x^2)} &= -2\cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin(x^2)}\right) \\ &= -2\cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x^2)} = -2\cdot 1^2 \cdot 1 = -2\end{aligned}$$

car $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ comme vu au cours.

(v) Comme $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$, on peut simplifier la fraction en mettant au même dénominateur pour calculer la limite :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) &= \lim_{x\to 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = -\frac{3}{3} = -1.\end{aligned}$$

(vi) Grâce à $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin((\alpha+\beta)/2)\sin((\alpha-\beta)/2)$, on peut réécrire le numérateur

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{-2\cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x+a)\right)\cdot \sin\left(\frac{1}{2}(x-a)\right)}{x-a} \\ &= -\left(\lim_{x\to a} \sin\left(\frac{1}{2}(x+a)\right)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(x-a)\right)}{\frac{1}{2}(x-a)}\right) = -\sin a\end{aligned}$$

car la fonction sin est continue sur $\mathbf{R}$ et car la dernière limite vaut 1.

(vii) Par définition $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour $x \in \mathbf{R}$ tel que $\cos x \neq 0$.
Nous avons $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \sin x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \sin x = 1$. D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \cos x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \cos x = 0$.
Comme $\cos x < 0$ pour $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$.

(viii) Comme $\cos x > 0$ pour $\dfrac{-\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$.

(ix) Ces deux dernières limites étant différentes, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$ n'existe pas.

11.3. Parmi les formulations suivantes, lesquelles sont équivalentes à "f est continue en x", qui est définie par:

(0) $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

(i) $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y : |x - y| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta$

Considérons la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Alors, au point $x = 0$, et pout tout $\epsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta = 3$ pour vérifier la formulation. Pourtant f n'est pas continue en x. Cette formulation n'est donc pas équivalente à "f est continue en x"

(ii) $\forall \delta > 0\, \exists \epsilon > 0\, \forall y : |x - y| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta$

Cette formulation est équivalente à la définition originelle (0), il suffit en effet d'échanger les lettres utilisées pour ϵ et δ.

Nous montrons à présent que

(iii) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$, et

(iv) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$

sont aussi équivalentes à (0) en montrant (iv)$\Rightarrow$(iii). En effet les implications (0)$\Rightarrow$(iv) et (iii)$\Rightarrow$(0) sont élémentaires et donc ainsi les trois seront équivalentes.

Pour (iv)$\Rightarrow$(iii), soit donc $\epsilon > 0$. On applique (iv) à $\epsilon/2$, ce qui nous fourni l'existence d'un nombre $\eta > 0$ tel que

$$\forall y : |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon/2.$$

On pose ensuite $\delta = \eta/2$ et on vérifie bien que pour tout y on a:

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon/2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

(v) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y : |x - y| < \epsilon \Leftarrow |f(x) - f(y)| < \delta$.

Une fonction constante est continue mais ne satisfait pas cette condition.

(vi) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y : |x - y| < \delta \Leftarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.

De nouveau, une fonction constante ne satisfait pas cette condition.