

10.1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \ell$. Montrons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) = \ell.$$

Soit $\epsilon > 0$, on doit montrer qu'il existe $N = N(\epsilon) \in \mathbf{N}$, tel que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - \ell \right| < \epsilon \quad \forall n > N$$

Calculons

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - \ell \right| \leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - \ell \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \ell) \right|$$

Mais par convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que

$$|x_k - \ell| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall k > m$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \ell) \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \ell| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m |x_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^n |x_k - \ell| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m |x_k - \ell| + \frac{n-m}{n} \cdot \frac{\epsilon}{2} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m |x_k - \ell| + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Si on peut montrer qu'il existe N tel que $\sum_{k=1}^m |x_k - \ell| < n \cdot \frac{\epsilon}{2}, \forall n > N$ on aura le résultat cherché.

$$N = \frac{2M(m)}{\epsilon} \quad M = \max\{|x_k - \ell| \mid 1 \leq k \leq m\}.$$

10.2. *i)* Soit $\epsilon > 0$. Si $\delta > 0$ et $0 < |x-1| \leq \delta$, on a $|2x+8-10| = |2(x-1)| = 2|x-1| \leq 2\delta$. Dans la définition de limite, on peut choisir $\delta = \epsilon/2$ et obtenir $|2x+8-10| \leq \epsilon$ pour tout $x \in [1-\delta, 1+\delta] \setminus \{1\}$.

ii) Soit $\epsilon > 0$. Si $\delta > 0$ et $0 < |x-2| \leq \delta$, on a

$$|x^2 - 4| = |(x+2)(x-2)| = |x+2| |x-2| \leq (2+\delta+2)|x-2|$$

car $2-\delta \leq x \leq 2+\delta$. Si de plus $\delta \leq 1$, $(2+\delta+2)|x-2| \leq 5|x-2| \leq 5\delta$. Si encore $\delta \leq \epsilon/5$, on a finalement $5\delta \leq \epsilon$.

Dans la définition de limite, on peut choisir $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$ et obtenir $|x^2 - 4| \leq \epsilon$ pour tout $x \in [2-\delta, 2+\delta] \setminus \{2\}$.

iii) Soit $\epsilon > 0$. Si $\delta \in]0, 1]$ et $0 < |x - (-2)| \leq \delta$, on a $x \in [-3, -1]$ et

$$||x| - x^3 - 10| = |-x - x^3 - 10| = |x^3 + x + 10| = |(x+2)(x^2 - 2x + 5)| \leq |x+2|(3^2 + 2 \cdot 3 + 5) = 20|x+2| \leq 20\delta.$$

Dans la définition de limite, on peut choisir $\delta = \min\{1, \epsilon/20\}$ et obtenir $||x| - x^3 - 10| \leq \epsilon$ pour tout $x \in [-2-\delta, -2+\delta] \setminus \{-2\}$.

10.3. a) On a

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \quad \text{et} \quad (x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1).$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \quad \forall x \in D.$$

Si $x_0 = 1$, on a

$$\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} x_0} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\rightarrow} x_0} f(x) = \frac{3}{2}.$$

b) En reprenant la fonction $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ ci-dessus, on constate que

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x + 1) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0.$$

Ainsi

$$\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} -1} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \underset{>}{\rightarrow} -1} f(x) = +\infty,$$

et donc $\lim_{x \underset{\neq}{\rightarrow} -1} f(x)$ n'existe pas.

c) Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= x & \text{si } x \in \mathbf{Q} \\ f(x) &= 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \end{aligned}$$

on a, pour tout $\epsilon > 0$,

$$|x - 0| \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 0| \leq \epsilon.$$

En posant donc $\ell = 0$, $x_0 = 0$ et $\delta = \epsilon$, on obtient:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon \text{ tel que si } |x - x_0| \leq \delta \text{ alors } |f(x) - \ell| \leq \epsilon,$$

ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ lorsque $x_0 = 0$.

Ainsi donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\rightarrow} x_0} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\rightarrow} x_0} f(x) = 0.$$

d) En reprenant la fonction ci-dessus et en posant $x_0 = 1$, on constate:

- i) Si $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{Q}$, est telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ et $a_n > 1, \forall n \in \mathbf{N}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$.
- ii) Si $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, est telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ et $b_n > 1, \forall n \in \mathbf{N}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 0$.

Les propriétés i) et ii) prouvent que $\lim_{x \underset{>}{\rightarrow} 1} f(x)$ n'existe pas.

Il en est de même pour $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} 1} f(x)$.