

## Chapitre 4

# Formes du lit et résistance à l'écoulement

La recherche sur les formes de lit n'est pas motivée par la seule curiosité académique. Les dimensions et la géométrie des formes de lit sont déterminantes pour la rugosité réelle d'un lit mobile et la résistance qu'il oppose à l'écoulement.

Les considérations qui suivent se limitent aux cours d'eau larges à écoulement fluvial, caractérisés par de faible nombre de Froude. De ce fait, les antidunes ne sont pas traitées ici.

Ce chapitre se concentre sur les formes périodiques qui se développent dans la direction  $x$  de l'écoulement, à partir d'un lit initialement plat.

## Origine et définition des formes de lit

### **Bouffées turbulentes, dunes et bancs**

Il a été évoqué au chapitre précédent qu'une ondulation périodique du lit peut se développer dans la direction  $x$  de l'écoulement. L'explication de l'origine et des formes caractéristiques de ce phénomène est présentée ci-après.

Les formes de lit à grande échelle dont la longueur est proportionnelle à la profondeur de l'écoulement sont appelées « dunes » ; celles dont la longueur est proportionnelle à la largeur  $B$  sont appelées « bancs ».

L'expérience montre qu'aucune forme de lit périodique n'apparaît lorsque l'écoulement est laminaire. Les formes de lit ne se développent que si l'écoulement est turbulent.

**Le processus de « bouffée »**

La bouffée correspond à l'évolution du plus grand tourbillon macro-turbulent. Dans les zones de frottement élevé, à proximité des parois, les fluctuations de tension favorisent la formation de tourbillons. Ceux-ci sont transportés par l'écoulement, ils diffusent et se combinent par coalescence.

Dans ce processus, leur taille s'accroît tandis que leur nombre diminue. Certains de ces tourbillons, se développent comme une bouffée et atteignent la taille des dimensions externes de la section d'écoulement ( $h$  ou  $B$ ). Les tourbillons ( $e_v$ ) générés au contact du lit tournent dans le plans vertical ( $x;z$ ) et représentent la macro-échelle turbulente verticale, leur taille peut atteindre celle de la profondeur d'écoulement  $h$  (tourbillon  $E_v$  de la figure 4.1).

Les tourbillons  $e_H$  générés au contact des parois latérales du lit tournent dans le plan horizontal ( $x;y$ ) et représentent la macro-échelle turbulente horizontale ; leur taille peut atteindre celle de la largeur du lit  $B$  (tourbillon  $E_H$  de la figure 4.1)

La taille des tourbillons  $e_v$  et  $e_H$  augmente dans leur déplacement, avec le même angle de croissance

$$\tan \theta \approx 1/6 \tag{4.1}$$

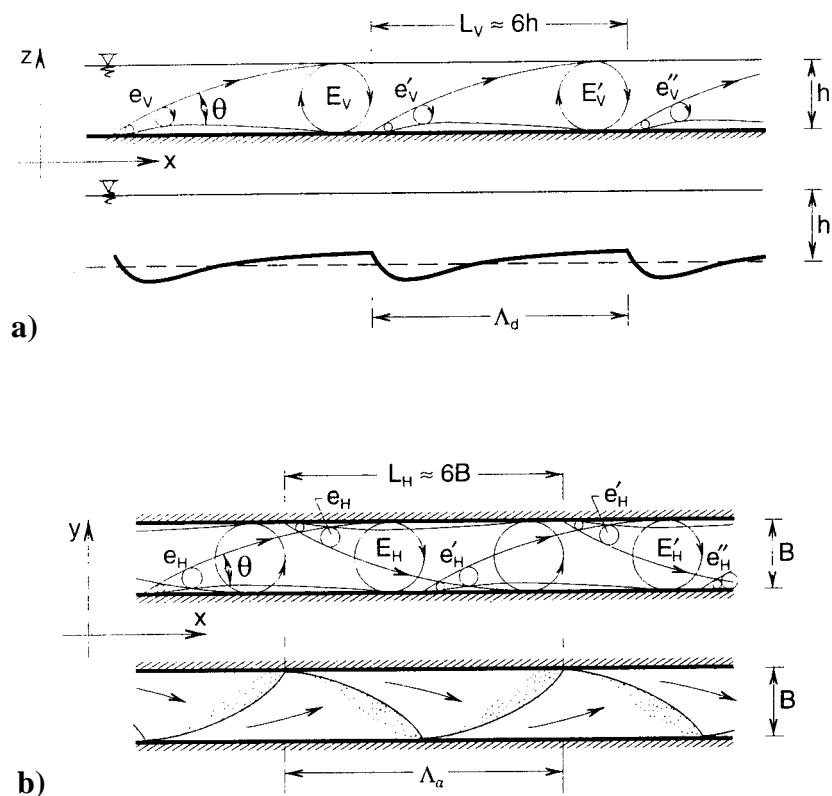


Fig. 4.1 Représentation schématique du développement des bouffées turbulentes dans les directions a) longitudinale et b) transversale

Lorsque la taille des tourbillons  $e_V$  et  $e_H$  atteint leur valeur limite  $h$  et  $B$ , ils sont limités dans leur croissance et se désintègrent, c'est la phase de déferlement. Cela favorise la création de nouveaux tourbillons  $e'_V$  et  $e'_H$  qui sont la source d'un nouveau cycle et ainsi de suite.

Le fait que la désintégration d'une bouffée coïncide, dans l'espace ( $x$ ) et dans le temps ( $t$ ), avec une nouvelle génération signifie que les bouffées se développent séquentiellement selon  $x$ .

Les distances  $L_V$  et  $L_H$  parcourues par les tourbillons  $e_V$  et  $e_H$  au cours de leur existence sont appelées les longueurs de bouffées verticale et horizontale. Etant donné que  $e'_V$  et  $e'_H$  sont transportés par l'écoulement à la vitesse moyenne  $u_m$ , leurs durées de vie valent  $T_V=L_V/u_m$  et  $T_H=L_H/u_m$ , elles correspondent aux périodes des bouffées.

Sur la base de mesures, il a été trouvé que

$$L_V \approx 6h \text{ et } L_H \approx 6B \quad (4.2)$$

### L'évolution des bouffées

Le processus évolutif des bouffées n'a pas encore été totalement exploré. Il est toutefois mieux connu pour les bouffées verticales qui sont examinées ici.

Les tourbillons formateurs de bouffées  $e_V$  sont tri-dimensionnels. Leur croissance dans les sections transversales ( $z;y$ ) se produit comme indiqué schématiquement dans la figure 4.2. La plus grande extension latérale de  $e_V$  est ainsi  $\sim 2h$ , définie comme largeur de la bouffée. Une séquence de bouffées verticales est ainsi confinée dans un couloir de largeur  $2h$  et de hauteur  $h$ .

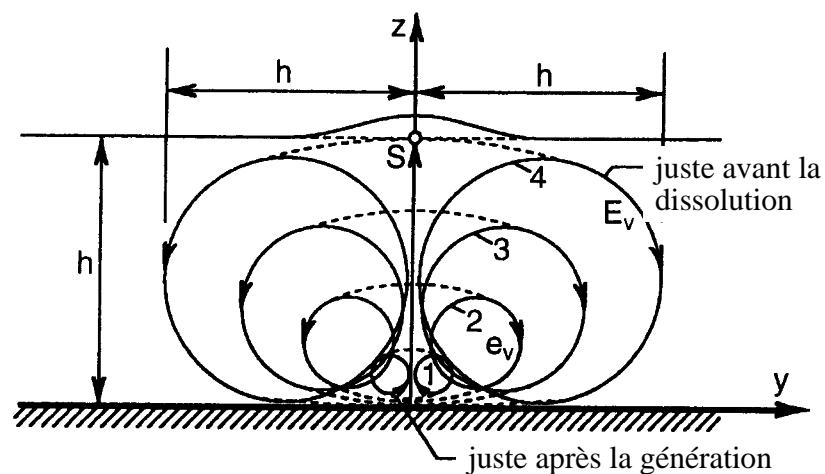


Fig. 4.2 Développement latéral schématique d'une bouffée verticale

Ces séquences périodiques de bouffées successives conduisent à une déformation du lit (Fig. 4.13). Les dunes qui se constituent ont une longueur d'onde  $\Lambda_d$  qui est identique à  $L_V$

$$\Lambda_d = L_V \approx 6h \tag{4.3}$$

De même, les bouffées à une rangée qui se développent horizontalement ont une longueur d'onde  $\Lambda_a$  (Fig. 4.1b) :

$$\Lambda_a = L_H \approx 6B \tag{4.4}$$

Il convient de remarquer que les longueurs de dunes  $\Lambda_d$  et  $\Lambda_a$  représentent la taille finale d'une forme de lit dont le développement nécessite une durée  $(T_\Delta)_d$ . Avant d'atteindre cette taille d'équilibre, les dunes ont progressivement augmenté leur taille selon un processus temporel non linéaire ; les mini-dunes initiales étant plus rapidement créées que les dunes proches de la dimension finale.

Aucune influence systématique de la viscosité de l'écoulement ni de la rugosité du lit  $k_s$  n'ont pu être mises en évidence sur la longueur des bouffées verticales. Il en va de même pour les bouffées horizontales.

### Rides

Les rides, comparables aux dunes, n'apparaissent pas non plus en écoulement laminaire. Elles apparaissent lorsque l'écoulement turbulent est hydrauliquement lisse, c'est à dire pour

$$v_* k_s / \nu \approx 2X \ll 5$$

Les rides sont définies comme des formes de lit dont la longueur  $\Lambda_r$  ne dépend pas des dimensions externes de l'écoulement ( $h$  et/ou  $B$ ). Elles ne sont donc pas la conséquence de bouffées turbulentes. La longueur des rides  $\Lambda_r$  peut être définie à partir de la figue 4.3. Ainsi, pour  $\eta_* \leq 1$ , le nombre de Reynolds des rides vaut  $\approx 2400$ .

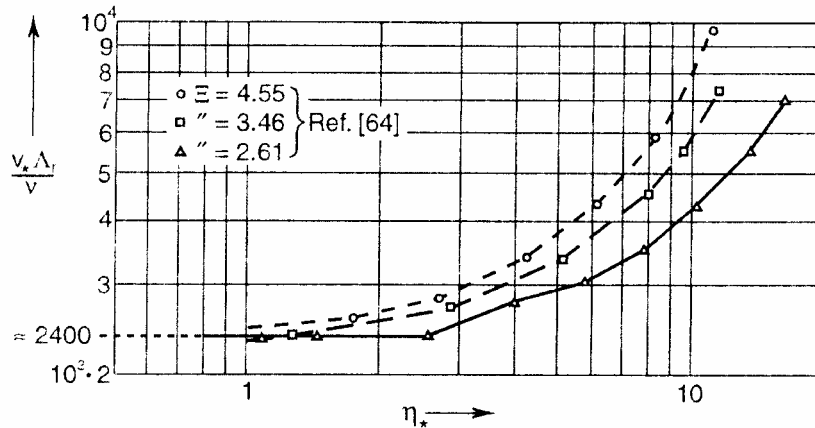


Fig. 4.3 Relation  $v_* \Lambda_r / \nu = f(\eta_*; E)$

Le temps de développement des rides  $(T_{\Delta})_r$  est entièrement lié à la durée de développement de leur cambrure.

### Écoulement uniforme. Clarification

L'apparition de structures géométriques du lit introduit une modification locale des conditions d'écoulement. Toutefois, un écoulement sur un lit à structure périodique bi-dimensionnelle peut être considéré comme pseudo-uniforme car chaque paramètre de l'écoulement est défini par sa valeur moyenne sur  $(t ; x)$

## Géométrie et régions de formation des formes de lit causées par la turbulence verticale

### Généralités

Un écoulement bi-dimensionnel, bi-phasique en masse, permanent et uniforme peut être défini par trois variables adimensionnelles (cf. Chp. 3)

$$X, Y, Z \text{ ou } E, \eta_*, Z \quad (4.5)$$

Dans un canal alluvial, la largeur  $B$  est finie et  $B/h$  doit être considéré comme une variable supplémentaire ; le jeu de paramètres (4.5) devient alors

$$X, Y, Z, B/h \text{ ou } E, \eta_*, Z, B/h \quad (4.6)$$

Ces quatre variables sont nécessaires et suffisantes pour exprimer toute caractéristique de l'écoulement bi-phasique dans un lit alluvial.

Cela ne signifie pas cependant que chacune de ces variables soit nécessaire pour décrire chaque caractéristique. Par exemple, l'expérience montre que les caractéristiques géométriques des formes de lit générées par la turbulence verticale dans des canaux de grande largeur ( $B/h > 5$  à  $7$ ) ne sont pas affectées par le ratio  $B/h$ . Cela signifie que ces caractéristiques peuvent être déterminées par les trois variables (4.5), si elles sont générées par un écoulement bi-dimensionnel. Par contre, les caractéristiques géométriques des formes de lit générées par la turbulence horizontale, c'est à dire les bancs, sont principalement déterminées par  $B/h$ .

La hauteur des formes de lit de type  $i$  est notée par  $\Delta_i$  et leur cambrure définie par le ratio  $\Delta_i/\Lambda_i = \delta_i$ .

Durant la phase de développement des formes de lit, son évolution se fait par érosion-déposition autour de la ligne du lit plat initial. Ainsi la position spatiale moyenne du lit reste identique à tout instant (Fig. 4.4)

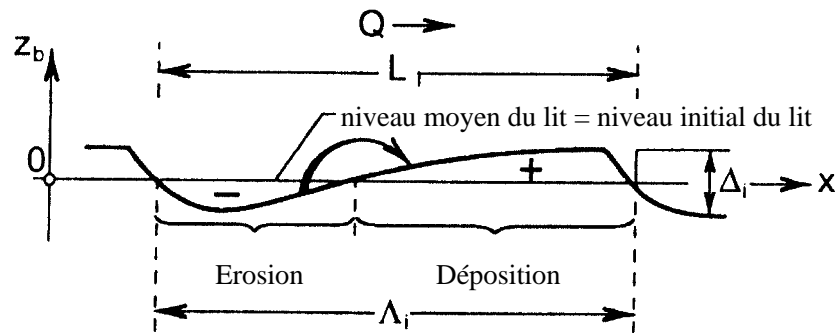


Fig. 4.4 Déformation du lit autour de la position originelle du lit plat

## Caractéristiques géométriques des dunes

### Longueur des dunes

Sur la base des considérations précédentes,  $B/h$  peut être négligé. De plus l'expérience montre que  $\Lambda_d$  ne dépend pas de  $Y$ . Ainsi, à partir de (4.5)

$$\frac{\Lambda_d}{D} = \phi'_{\Lambda_d}(X, Z) \quad (4.7)$$

En tenant compte du rapport de proportionnalité entre  $\Lambda_d$  et  $h$  établi par la relation (4.3),

$$\frac{\Lambda_d}{D} = \phi'_{\Lambda_d}(X, Z) \cdot 6Z \quad (4.8)$$

$$\text{où } \phi'_{\Lambda_d}(X, Z) \approx 1 \quad \text{lorsque } X \gg 35 \quad (4.9)$$

La fonction  $\phi_{\Lambda_d}$  a été définie expérimentalement comme exprimée graphiquement par la figure 4.5 et analytiquement par la relation (4.10)

$$\frac{\Lambda_d}{D} = 6Z \left[ 1 + 0.01 \frac{(Z-40)(Z-400)}{Z} e^{-m_\Lambda} \right] \quad (4.10)$$

$$\text{avec } m_\Lambda = 0.055\sqrt{Z} + 0.04X$$

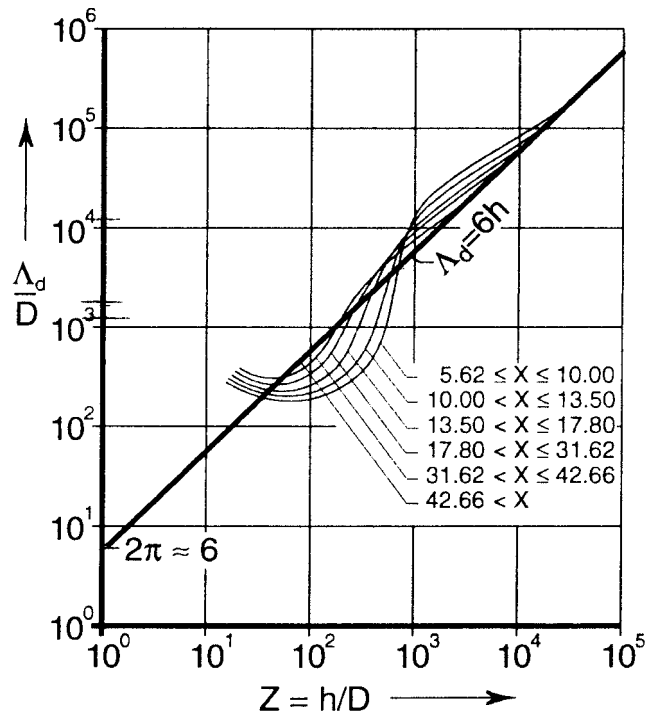


Fig. 4.5 Longueur adimensionnelle des dunes

### Cambrure des dunes

Etant donnée que les formes de lit générées par la turbulence verticale doivent être traitées comme bi-dimensionnelles, la cambrure des dunes  $\Delta_d/\Lambda_d = \delta_d$  est en général déterminée par les variables adimensionnelles (4.5),

$$\delta_d = \phi_{\delta_d}''(X, Y, Z) = \phi_{\delta_d}'(X, \eta_*, Z) \tag{4.11}$$

a) Ecoulement turbulent rugueux ( $X \gg 35$ )

Dans ce cas, le nombre de Reynolds  $X$  n'est plus une variable et (4.11) se réduit à

$$\delta_d = \phi_{\delta_d}(\eta_*, Z) \tag{4.12}$$

La représentation graphique de cette fonction, sur la base de valeurs expérimentales, est donnée sur la figure 4.6. Pour une valeur  $Z = \text{cte}$ ,  $\delta_d$  croît initialement avec l'augmentation de  $\eta_*$  (à partir de  $\delta_d = 0$  lorsque  $\eta_* = 1$ ), puis décroît pour retrouver la configuration d'un lit plat ( $\delta_d \rightarrow 0$ ).

Les valeurs  $(\delta_d)_{\text{max}}$  et  $\hat{\eta}_{*d}$  correspondant au sommet de ces courbes sont exprimées en fonction de  $Z$  sur la figure 4.7 et analytiquement par les relations (4.13) et (4.14).

$$(\delta_d)_{\max} = 0.00047Z^{1.2} e^{-0.17Z^{0.47}} + 0.04(1 - e^{-0.002Z}) \quad (4.13)$$

$$\hat{\eta}_{*d} = 35(1 - e^{-0.074Z^{0.4}}) - 5 \quad (4.14)$$

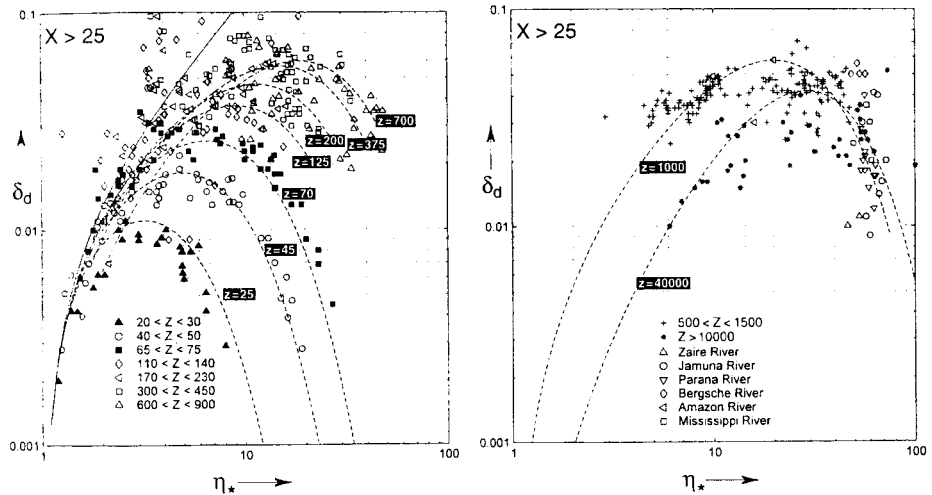


Fig. 4.6 Evolution de la cambrure des dunes pour  $X > 35$  en fonction de  $\eta_*$  et  $Z$

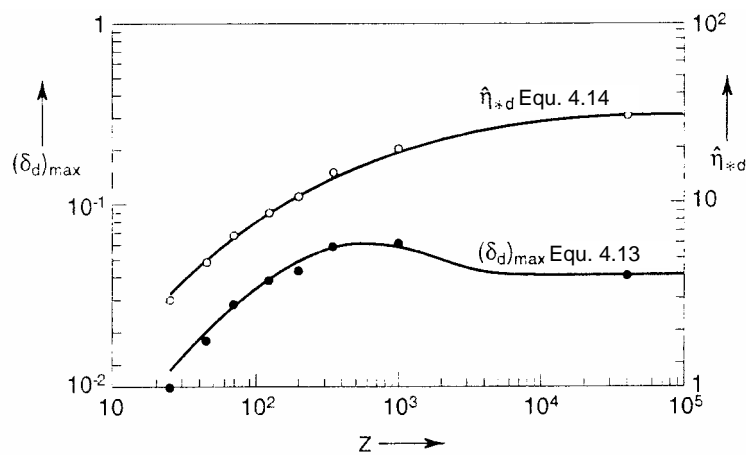


Fig. 4.7 Valeurs maximales de la cambrure des dunes  $(\delta_d)_{\max}$  et de  $\hat{\eta}_{*d}$  en fonction de  $Z$ , pour  $x > 35$

La famille élargie des courbes  $\delta_d$  est présentée graphiquement sur la figure 4.8. Elle peut être exprimée analytiquement par la relation

$$\delta_d = (\delta_d)_{\max} (\zeta_d e^{1-\zeta_d})^{m_\delta} \quad (4.15)$$

où 
$$\zeta_d = \frac{\eta_* - 1}{\hat{\eta}_{*d} - 1} \quad (4.16)$$

et 
$$m_\delta = 1 + 0.6e^{-0.1(5 - \log Z)^{3.6}} \quad (4.17)$$

avec  $(\delta_d)_{\max}$  et  $\hat{\eta}_{*d}$  selon les équations (4.13) et (4.14)

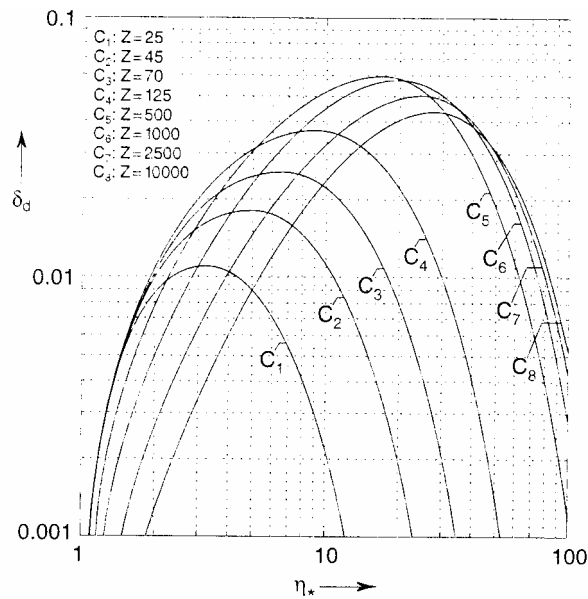


Fig. 4.8 Famille de courbes  $\delta_d(\eta_*)$  pour différentes valeurs de Z.

b) Ecoulement de transition ( $\approx 2.5 < X < \approx 35$ )

Dans ce cas, la cambrure des dunes est plus petite, elle décroît progressivement avec X et devient pratiquement nulle pour  $X < \approx 2.5$ . Cette réduction progressive de la cambrure peut être exprimée par une fonction appropriée  $\psi_d(X)$ ,

$$\psi_d(X) = 1 - e^{-(X/10)^2} \tag{4.18}$$

La représentation graphique de cette fonction, avec sa correspondante pour les rides, est donnée sur la figure 4.9.

Ainsi de manière générale, la cambrure des dunes peut être exprimée par la relation

$$\delta_d = \psi_d(X) \cdot \phi_{\delta_d}(\eta_*, Z) \tag{4.19}$$

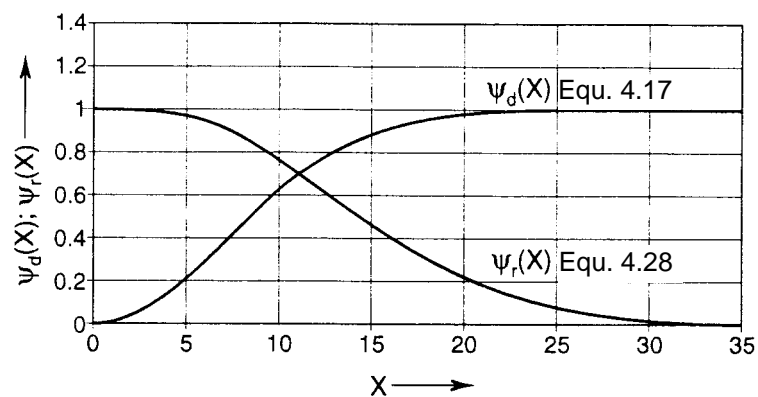


Fig. 4.9 Fonction de pondération de la cambrure des dunes, respectivement des rides, pour  $\approx 2.5 < x < \approx 35$

## Caractéristiques géométriques des rides

### Longueur des rides

Puisque les rides se formant sur le lit d'un canal large sont indépendantes de  $h$  et  $B$ , leur longueur d'onde  $\Lambda_r$  s'exprime par

$$\frac{\Lambda_r}{D} = \phi''_{\Lambda_r}(X, Y) = \phi'_{\Lambda_r}(X, E) = \phi_{\Lambda_r}(\eta_*, E) \quad (4.20)$$

La famille des courbes expérimentales de la relation  $\phi'_{\Lambda_r}(X, E)$  est présentée sur la figure 4.10.

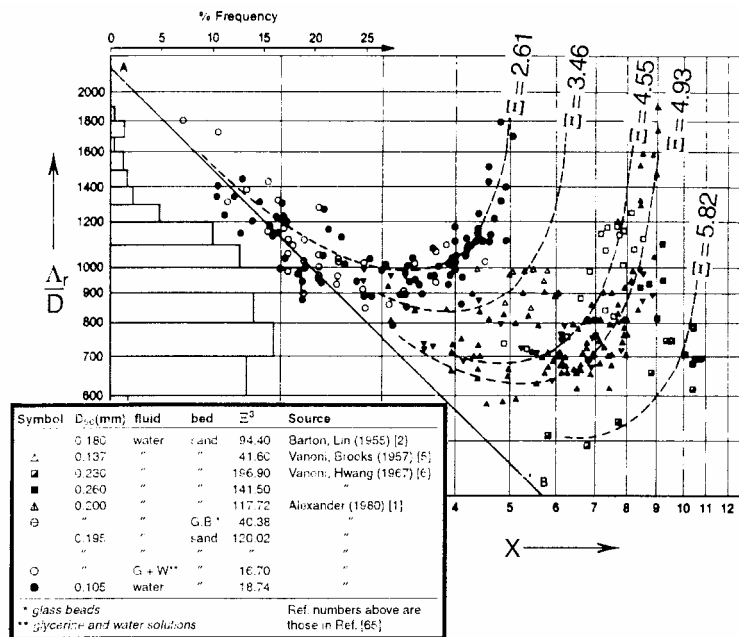


Fig. 4.10 Longueur adimensionnelle des rides en fonction de X et E

La valeur minimale de la longueur adimensionnelle des rides est une fonction de E qui peut s'exprimer par

$$\frac{(\Lambda_r)_{\min}}{D} = \frac{2650}{E^{0.88}} \quad (4.21)$$

En outre, les observations montrent que les rides disparaissent lorsque  $\eta_* \approx 21$ , quel que soit le matériau du lit.

Les courbes de la figure 4.10 peuvent être exprimées par une relation unique

$$\frac{\Lambda_r}{(\Lambda_r)_{\min}} = [4H(1-H)]^{-1} \quad (4.22)$$

où

$$H = \sqrt{\frac{\eta_*}{\eta_{*max}}} = \sqrt{\frac{\eta_*}{21}} \quad (4.23)$$

En introduisant (4.21) et (4.23), l'équation (4.22) devient

$$\frac{\Lambda_r}{D} \approx \frac{3000}{E^{0.88} \sqrt{\eta_*} (1 - 0.22\sqrt{\eta_*})} \quad (4.24)$$

### Cambrure des rides

La cambrure des rides  $\delta_r = \Delta_r / \Lambda_r$  ne dépend pas de  $Z$ , elle peut s'exprimer comme,

$$\delta_r = \phi_{\delta_r}^m(X, Y) = \phi_{\delta_r}''(X, \eta_*) = \phi_{\delta_r}'(E, \eta_*) \quad (4.25)$$

a) Ecoulement visqueux au contact du lit ( $X < \approx 2.5$ )

Les résultats expérimentaux obtenus pour des petites valeurs de  $X$  sont présentés sur la figure 4.11. Ils montrent que lorsque  $\eta_* = \eta_{*max} \approx 21$ , les rides disparaissent ( $\delta_r = 0$ ) et que la cambrure maximale  $(\delta_r)_{max} \approx 0.14$  correspond à  $\eta_* = \hat{\eta}_{*r} \approx 11$ .

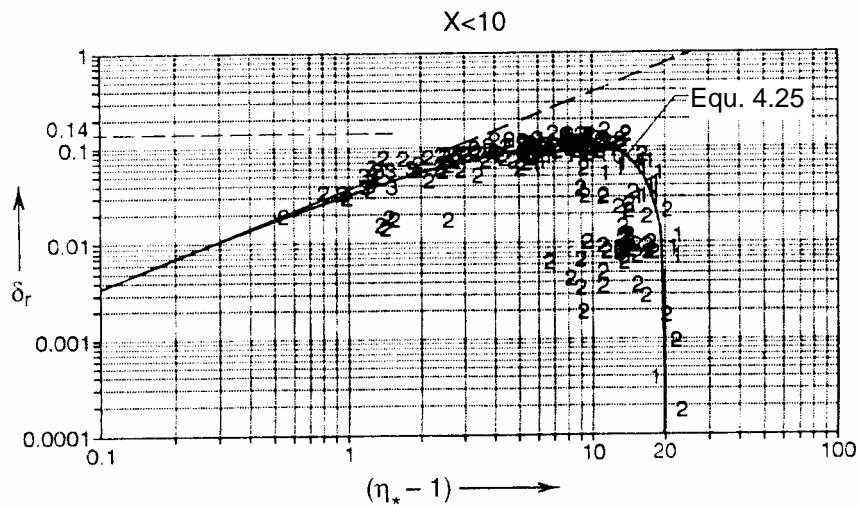


Fig. 4.11 Evolution de la cambrure des rides pour  $X < 2.5$  en fonction de  $\eta_*$

L'évolution de la cambrure des rides sur l'intervalle  $1 \leq \eta_* \leq 21$  peut être exprimée par la relation

$$\delta_r = 0.014r(\eta_* - 1)e^{(1.1 - 0.1\eta_*)} \quad (4.26)$$

avec

$$r=1 \text{ si } \zeta_r \leq 1; \quad r = \zeta_r (2 - \zeta_r) \text{ si } 1 < \zeta_r \leq 2 \quad (4.27)$$

où

$$\zeta_r = \frac{\eta_* - 1}{\hat{\eta}_{*r} - 1} \quad (4.28)$$

b) Ecoulement dans le domaine  $\approx 2.5 < X < \approx 35$

Avec l'augmentation de  $X$ , l'influence visqueuse de la proximité du lit se réduit et la valeur de  $\delta_r$  décroît progressivement jusqu'à zéro lorsque  $X \approx 35$ . Cette évolution peut être prise en compte par l'introduction d'une fonction appropriée pour multiplier la cambrure maximale  $(\delta_r)_{\max} \approx 0.14$ ,

$$\psi_r(X) = \begin{cases} e^{-[(X-2.5)/14]^2} & \text{si } X > 2.5 \\ 1 & \text{si } X \leq 2.5 \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\delta_r = \psi_r(X) \cdot \phi_{\delta_r}(\eta_*) \quad (4.30)$$

Finalement, la cambrure des rides est donnée par la représentation graphique de  $\psi_r(X)$  sur la figure 4.7.

## Régions d'existence des rides et des dunes

Une forme de lit existe lorsqu'elle présente une cambrure différente de zéro. Les domaines d'existence des rides  $R$  et de dunes  $D$  sont présentés sur la figure 4.12 dans l'espace  $\eta_* - X$ .

La région de  $R$  varie entre une limite inférieure correspondant à  $\eta_*=1$  et sa limite supérieure  $\eta_*=21$ .

La région de  $D$  dépend de  $Z$ . Sa limite inférieure est la même que pour  $R$ , soit  $\eta_*=1$ , quel que soit  $Z$ . La limite supérieure de  $D$  varie avec l'augmentation de  $Z$ . Les valeurs de  $\eta_*$  à la limite supérieure correspondent à des valeurs de  $\delta_d=10^{-3}$ .

La cambrure des rides  $\delta_r$  décroît à partir de  $X \approx 2.5$  pour disparaître complètement à  $X \approx 35$ . La cambrure des dunes  $\delta_d$  décroît à partir de  $X \approx 35$  pour disparaître à  $X \approx 2.5$ . Sur l'intervalle  $\approx 2.5 < X < \approx 35$  des rides et des dunes peuvent être présentes simultanément, sous la forme de rides superposées aux dunes. Une telle superposition ne peut exister que si  $\Lambda_d$  est un multiple de  $\Lambda_r$  (de l'ordre de trois ou plus). Il est ainsi possible d'écrire

$$\frac{\Lambda_d}{\Lambda_r} \approx \frac{6h}{1000D} = 0.006Z \geq 3, \text{ soit } Z \geq 500 \quad (4.31)$$

ce qui représente une condition supplémentaire (à  $\approx 2.5 < x < \approx 35$ ) pour l'existence simultanée de dunes et de rides.

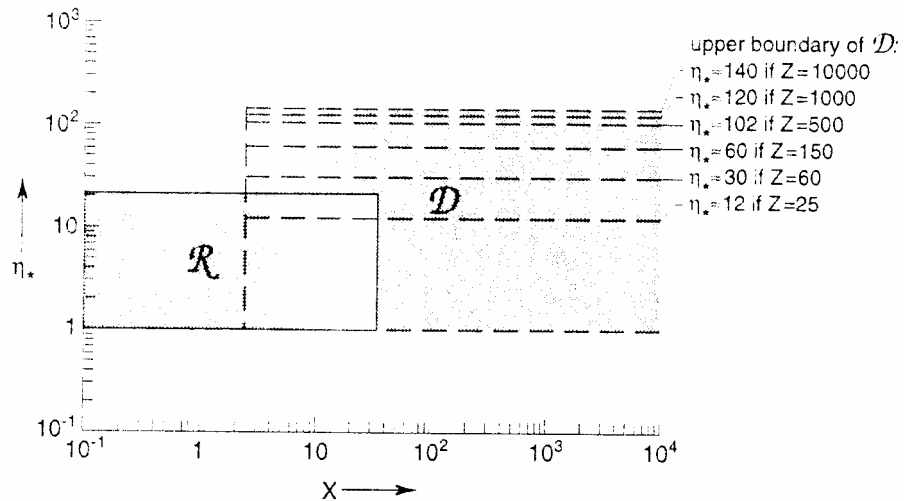


Fig. 4.12 Domaines d'existence de rides R et de dunes D

## Géométrie et régions d'existence des formes de lit causées par la turbulence horizontale

### Longueur de bancs alternés

La longueur de bancs alternés  $\Lambda_a$  n'est influencée ni par la rugosité du lit ni par les conditions visqueuses de l'écoulement à proximité du lit, ainsi

$$\Lambda_a \approx 6B \quad (= \Lambda_l) \quad (4.32)$$

### Bancs multiples. Configuration et longueur.

Les tourbillons qui sont à l'origine des bouffées horizontales trouvent leur origine à proximité des parois latérales, là où se rencontrent les plus fortes tensions  $\tau_{xy}$ . (Fig. 4.13a). La taille du tourbillon  $e_H$  croît au fur et à mesure qu'il est transporté par l'écoulement. Le diamètre du tourbillon atteint éventuellement sa taille maximale  $E_H$  égale à  $B$ . A ce stade de développement, il est au contact des deux rives et se dissipe.

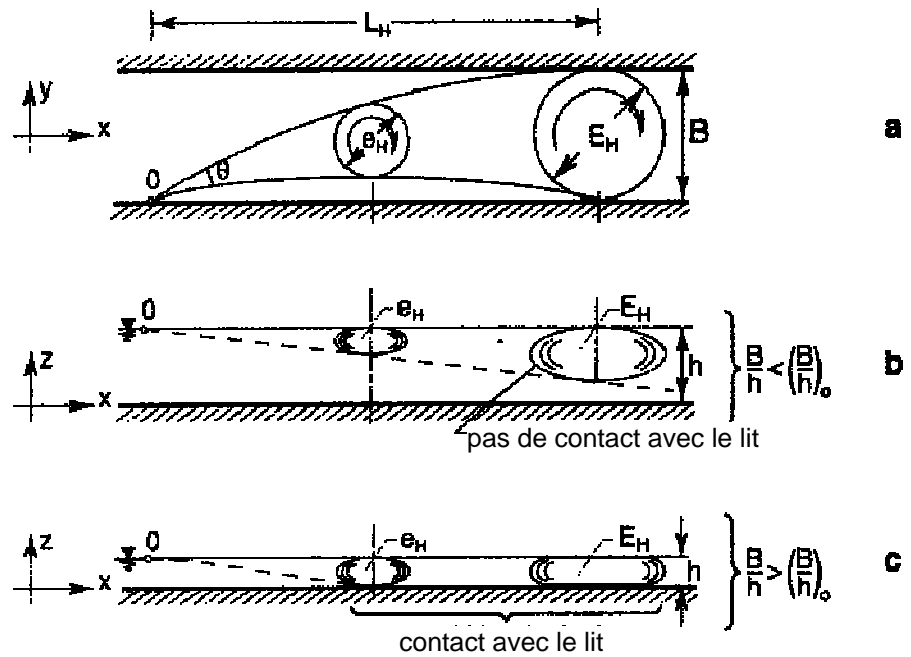


Fig. 4.13 Développement schématique d'une bouffée transversale

Lorsque le rapport  $B/h$  est petit, inférieur à une certaine valeur  $(B/h)_0$ , le tourbillon  $e_H$  atteint sa taille maximale  $B$  sans toucher le lit (Fig. 4.13b).

Dans ce cas,  $e_H$  ne peut évidemment pas produire une forme de lit. Par contre, si  $B/h > (B/h)_0$  le tourbillon entre au contact du lit et est capable de produire un banc.

Lorsque  $B/h$  est plus grand que  $(B/h)_0$ , mais plus petit qu'une certaine valeur  $(B/h)_1$ , les tourbillons générés à partir des deux rives produisent des bancs alternés simples (Fig. 4.1b). Si  $B/h > (B/h)_1$  les tourbillons  $e_H$  touchent le lit avant d'avoir atteint leur taille  $B$ . Dans ce cas, les tourbillons développés à partir des deux rives se rencontrent au milieu du cours d'eau et il se forme des bancs alternés doubles (Fig. 4.14a). L'incrémentation suivante du rapport  $B/h$  débouche sur des bancs alternés triples, ...,  $n$  (Figs. 4.19b, c).

La longueur des bouffées et des bancs à  $n$  rangées est donnée par

$$(L_H)_n = \Lambda_n = \frac{6B}{n} \tag{4.33}$$

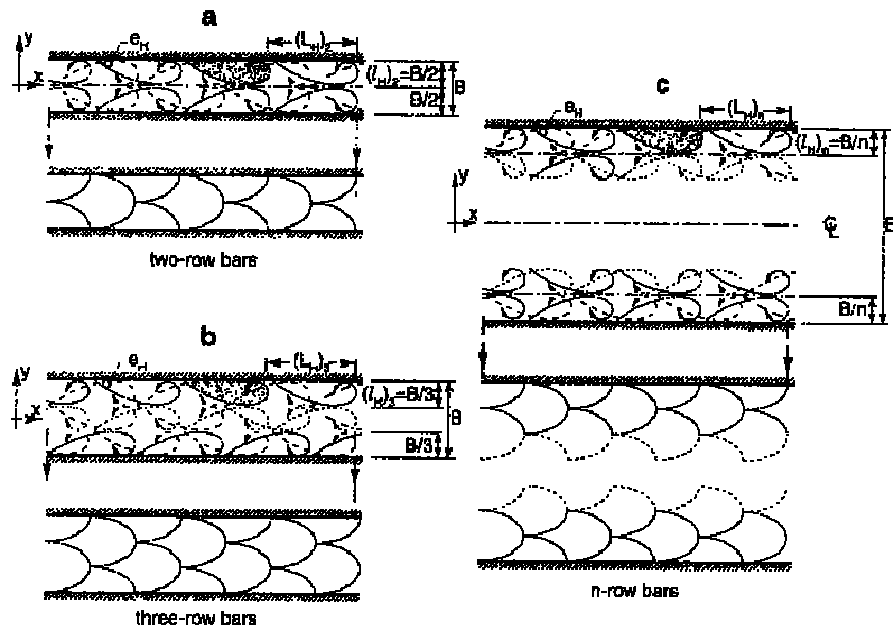


Fig. 4.14 Développement schématique de bancs sur a) deux rangées ; b) 3 rangées ; c) n rangées (l'échelle y est le double de l'échelle x)

### Région d'existence et cambrure des bancs

Etant donnée que la configuration des bouffées horizontales est déterminée par  $B/h$  et  $Z$ , les caractéristiques géométriques des bancs doivent également être déterminées par ces paramètres.

Les résultats expérimentaux et de terrain présentés sur la figure 4.15 mettent en évidence les zones caractérisées par des bancs alternés et multiples. Ainsi, la limite supérieure des bancs alternés peut être définie par la ligne  $\mathcal{L}$  et les relations analytiques suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Si } \left(\frac{h}{D}\right) < \approx 200 \text{ alors } \left(\frac{B}{h}\right)_1 &= 25 \left(\frac{h}{D}\right)^{1/3} \\ \text{Si } \left(\frac{h}{D}\right) > \approx 200 \text{ alors } \left(\frac{B}{h}\right)_1 &= 146 \end{aligned} \quad (4.34)$$

De manière similaire, la limite inférieure des bancs alternés  $\mathcal{L}_A$  peut être définie par,

$$\begin{aligned} \text{Si } \left(\frac{h}{D}\right) < \approx 100 \text{ alors } \left(\frac{B}{h}\right)_o &= 0.25 \frac{h}{D} \\ \text{Si } \left(\frac{h}{D}\right) > \approx 100 \text{ alors } \left(\frac{B}{h}\right)_o &= 25 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Les données actuellement disponibles ne permettent pas de distinguer les zones de rangées multiples  $(B/h)_2, (B/h)_3$ , etc.

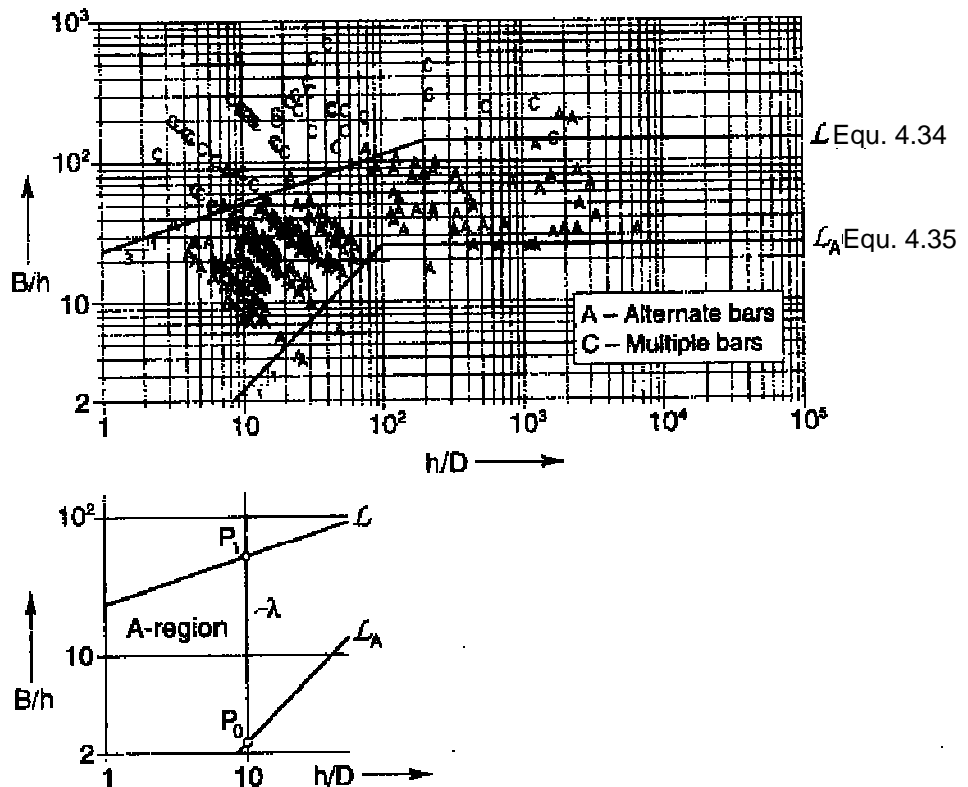


Fig. 4.15 Zones de bancs alternés et multiples

La cambrure des bancs alternés  $\delta_a = \Delta_a/\Lambda_a$  est fonction de  $B/h$  et  $Z$ . Pour une valeur de  $Z = h/D$  constante, représentée par la ligne  $\lambda$  sur la figure 4.15, la valeur de  $\delta_a$  est nulle aux points  $P_0$  et  $P_1$  et maximale quelque part au centre de la région A. Ainsi,  $\delta_a$  n'est pas une fonction monotone croissante de  $B/h$ . Il n'existe pas pour l'instant de relation pour exprimer la cambrure des bancs, toutefois, la valeur de  $\delta_a$  n'excède pas  $\approx 0.015$  et la contribution des bancs au coefficient de résistance à l'écoulement est négligeable.

## Coefficient de résistance (c) sur un lit ondulé

### Généralités

La présence de formes sur le lit d'un cours d'eau augmente sa rugosité effective. Ainsi le coefficient de résistance  $c$  doit être plus petit que le coefficient  $c_f$  correspondant à un lit plat. Nous admettrons tout d'abord qu'un seul type de forme (dune ou ride) est présent et qu'il est bi-dimensionnel (Fig. 4.16). Ainsi, le profil longitudinal ABA' ne varie pas dans la direction  $y$ .

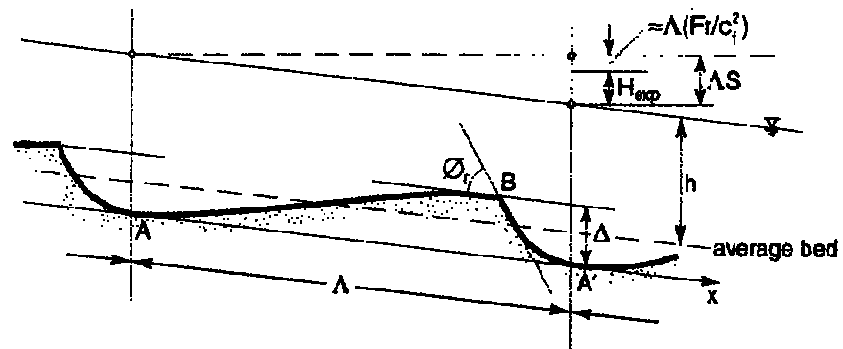


Fig. 4.16 Description paramétrique de la forme longitudinale du lit

## Formules pour c

### a) Développement théorique

La tension de frottement totale agissant sur un lit ondulé peut être obtenue par la relation

$$\tau_o = (\tau_o)_f + (\tau_o)_\Delta \quad (4.36)$$

où  $(\tau_o)_f$  est la tension due à la rugosité de surface  $k_s \approx 2D$

et  $(\tau_o)_\Delta$  est la tension de traînée due aux formes du lit.

En divisant les termes de l'équation (4.36) par  $(\rho \bar{u}^2)$  et en se référant aux équations (3.15) et (3.16), la première devient

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_f^2} + \frac{1}{c_\Delta^2} \quad (4.37)$$

ou c est le coefficient de résistance total d'un lit ondulé.

Etant donné que la cambrure d'un lit ondulé n'est jamais excessive, il est admis généralement d'exprimer  $c_f$  à l'aide de la relation pour un lit plat

$$c_f = \frac{1}{\kappa} \ln \left( 0.368 \frac{h}{k_s} \right) + B_s \quad (4.38)$$

## Dérivation théorique

Considérons maintenant  $c_\Delta$

L'angle de repos  $\phi_r$  au point B (Fig. 4.16) ne varie pas significativement d'un matériau granulaire à un autre car la forme du lit possède en A et B des tangentes parallèles à l'axe x. La forme de lit ABA' peut être définie par les deux ratio  $\delta = \Delta/\Lambda$  et  $\Lambda/h$ . Ainsi  $c_\Delta$  qui est imputable à cette géométrie peut s'écrire

$$\frac{1}{c_\Delta^2} = \phi_\Delta \left( \delta, \frac{\Lambda}{h} \right) \quad \text{où } \phi_\Delta(0, \Lambda/h) = 0 \quad (4.39)$$

Il convient de préciser que le rapport  $\Delta/\Lambda$  n'excède jamais  $\approx 0.14$ .

Conformément à l'équation (3.17), la perte de charge sur la distance  $\Lambda$  peut s'écrire  $\Lambda S = \Lambda(Fr/c^2)$ . Elle exprime la somme de la perte due au frottement ( $\approx \Lambda(Fr/c_f^2)$ ) et de celle imputable à l'élargissement brusque de la section d'écoulement en B ( $H_{el}$ ). La perte de charge due à la contraction progressive de l'écoulement entre AB et considérée comme négligeable.

La perte de charge totale devient

$$\Lambda \frac{Fr}{c^2} = \Lambda \frac{Fr}{c_f^2} + H_{el} \quad (4.40)$$

$$\text{ou } \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_f^2} + \frac{H_{el}}{\Lambda Fr} \quad (4.41)$$

Ainsi, la fonction  $\phi_\Delta$  peut s'écrire

$$\phi_\Delta \left( \delta, \frac{\Lambda}{h} \right) = \frac{H_{el}}{\Lambda Fr} \quad (4.42)$$

L'expression de  $H_{el}$  est obtenue par l'application du théorème de Borda :

$$\begin{aligned} H_{el} &= \frac{(U_{A'} - U_B)^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} \left( \frac{1}{1 - \frac{\Delta}{2h}} - \frac{1}{1 + \frac{\Delta}{2h}} \right) \\ &= \frac{U^2}{2g} \frac{(\Delta/h)^2}{\left[ 1 - \frac{1}{4}(\Delta/h)^2 \right]^2} \approx \frac{U^2}{2g} \left( \frac{\Delta}{h} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Même lorsque le rapport  $\Delta/h$  est grand, par exemple  $\approx 1/3$ , le dénominateur entre crochets de l'équation 4.42 est proche de 1. Ceci explique la simplification finale de cette équation.

Ainsi, l'équation (4.41) devient

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_f^2} + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\Lambda}{h} \quad (4.44)$$

Cette relation peut être généralisée de manière à superposer les effets de dunes et rides simultanées,

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_f^2} + \frac{1}{2h} (\delta_d^2 \Lambda_d + \delta_r^2 \Lambda_r) \quad (4.45)$$

Le troisième mode de formes de lit, correspondant aux bancs alternés peut être négligé car habituellement

$$\delta_a \ll 1.5 \cdot 10^{-2}.$$

Le facteur de résistance est ainsi fonction de  $c_f$ ,  $\delta_i$  et  $\Lambda_i$ . C'est également une fonction des trois variables adimensionnelles X, Y, Z ou E,  $\eta_*$ , Z. Pour l'application, la version suivante est considérée,

$$c = \phi_c(E, \eta_*, Z) \quad (4.46)$$

### Exemple numérique

Considérons le mouvement quasi uniforme, bi-dimensionnel, déterminé par les valeurs suivantes de ses paramètres caractéristiques,

Écoulement	Fluide	Matériaux du lit
$H = 1.25\text{m}$	$\rho = 1000\text{Kg/m}^3$	$\gamma_s = 16'186.5\text{N/m}^3$
$S = 0.0002$	$\nu = 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$	$D = D_{50} = 0.33\text{mm}$

### Solution

La vitesse de frottement

$$v_* = \sqrt{gSh} = 0.0495\text{m/s}$$

Permet de calculer

$$X = \frac{v_* D}{\nu} = 16.3; \quad Y = \frac{\rho v_*^2}{\gamma_s D} = 0.459; \quad Z = \frac{h}{D} = 3788$$

$$\text{et } E = \left( \frac{X^2}{Y} \right)^{1/3} = 8.3$$

à partir de l'équation (3.34)

$$Y_{cr} = 0.039$$

$$\text{et } \eta_* = \frac{Y}{Y_{cr}} = \frac{0.459}{0.039} = 11.7$$

Connaissant les valeurs de E,  $\eta_*$  et Z,

$$\text{À partir de (4.10) : } \Lambda_d = 11.9\text{m}$$

$$\text{À partir de (4.13) – (4.17) : } \delta_d = 0.027$$

$$\text{À partir de (4.24) } \Lambda_r = 0.18\text{m}$$

$$\text{À partir de (4.26) – (4.30) : } \delta_r = 0.052$$

En introduisant  $R_{c*} = 2X = 32.6$  dans l'équation (3.10),  $B_s = 9.06$

Et avec  $Z = 3788$ , l'équation (3.14) donne

$$c_f = \frac{1}{0.4} \ln \left( 0.368 \frac{Z}{2} \right) + B_s = 25.4$$

A partir de l'équation (4.45),

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_f^2} + \frac{1}{2h} (\delta_d^2 \Lambda_d + \delta_r^2 \Lambda_r) = 0.00533$$

et  $c = 13.7$

## Autres méthodes de détermination de c

De nombreuses méthodes sont proposées dans la littérature pour la détermination de c, deux d'entre elles sont présentées ci-après

### White, Paris et Bettess (1979)

Basée sur les résultats de nombreux essais de laboratoire et de mesures de terrain, la méthode peut se résumer comme suit :

considérons

$$F_{gr} = \left( \frac{\sqrt{32} \log(10Z)}{c} \right)^{n-1} \sqrt{Y} \quad (4.47)$$

$$\text{et } \frac{F_{gr} - A}{\sqrt{Y} - A} = \phi(E) \quad (4.48)$$

La fonction  $\phi(E)$  est donnée par la relation suivante,

$$\phi(E) = \begin{cases} 1 - 0.76(1 - e^{-(\log E)^{1.7}}) & \text{si } D = D_{35} \\ 1 - 0.70(1 - e^{-1.4(\log E)^{2.65}}) & \text{si } D = D_{65} \end{cases} \quad (4.49)$$

Pour  $n$  et  $A$  les relations suivantes sont proposées :

$$\text{si } 1 \leq E < 60, \quad n = 1 - 0.56 \log E \quad \text{et} \quad A = \frac{0.23}{\sqrt{E}} + 0.14 \quad (4.50)$$

$$\text{si } E \geq 60, \quad n = 0 \quad \text{et} \quad A = 0.17 \quad (4.51)$$

Ainsi,

- 1, A partir des valeurs des paramètres caractéristiques, déterminer  $E$ ,  $Y$  et  $Z$
2. Déterminer  $\phi(E)$ ,  $n$  et  $A$  à partir de (4.49), (4.50) et (4.51)
3. Déterminer  $F_{gr}$  à partir de (4.48)
4. Déterminer  $c$  à partir de (4.47)

### Van Rijn (1984)

Dans cette approche, la résistance totale du lit  $c$  est liée à une rugosité de lit équivalente  $K_s$  par la relation

$$c = 2.5 \ln \left( 11 \frac{R}{K_s} \right) \quad (4.52)$$

où  $R$  est le rayon hydraulique.

Par ajustement régressif d'un grand nombre de données expérimentales et de terrain correspondant au domaine  $B/h > 5$  et  $h/K_s > 10$ , la relation suivante a été établie,

$$K_s = 3D + 1.1\Delta(1 - e^{-25\delta}) \quad \text{avec } 0.01 \leq \delta \leq 0.2 \quad (4.53)$$

Cette expression est évaluée pour le cas de dunes uniquement ( $\Delta = \Delta_d$ ,  $\delta = \delta_d$ ),

$$\frac{\Delta_d}{h} = 0.11 Z^{-0.3} (1 - e^{-0.5T})(25 - T) \quad (4.54)$$

$$\text{et } \delta_d = 0.015 Z^{-0.3} (1 - e^{-0.5T})(25 - T) \quad (4.55)$$

$$\text{où } T = \frac{(\bar{u}/c_f)^2 - v_{*cr}^2}{v_{*cr}^2} \quad (4.56)$$

## Débit solide ( $q_s$ ) sur lit ondulé

Nous admettrons par convention que les formes de lit n'introduisent pas de modification de la forme analytique de l'équation de transport. Leur influence sur le débit solide peut ainsi être introduite par une adaptation appropriée des vitesses et des tensions de frottement considérées dans l'équation.

### Modification de $\tau_0$

Les formules de transport solide (3.39) et (3.45) s'appliquent au cas d'un lit plat où la mise en mouvement des grains est due au frottement de surface uniquement ( $(\tau_0)_\Delta = 0$  et  $\tau_0 = (\tau_0)_f$ ). Lorsque le lit est ondulé, seule la contribution  $(\tau_0)_f$  est responsable du mouvement des grains. Dans ce cas,  $\tau_0$  doit être remplacé par

$$(\tau_0)_f = \tau_0 \left( \frac{c}{c_f} \right)^2 = \tau_0 \lambda_c^2 \quad (4.57)$$

Où  $c$  et  $c_f$  sont définis par les équations (4.44) et (4.38)

### Modification de $\bar{u}$

En indiquant avec un indice  $f$  les caractéristiques de l'écoulement sur un lit plat et sans indice celles sur un lit ondulé,

$$\bar{u}_f = c_f \sqrt{\tau_0 / \rho} ; \quad \bar{u} = c \sqrt{\tau_0 / \rho} \quad (4.58)$$

Il vient

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_f} = \frac{c}{c_f} = \lambda_c (< 1) \quad (4.59)$$

### Modification de $q_{sb}$

Selon la notation ci-dessus, la formule de Bagnold (3.45) s'écrit,

$$q_{sb} = \beta' \bar{u}_f (\tau_o - (\tau_o)_{cr}) / \gamma_s \quad (4.60)$$

Dans le cas d'un lit ondulé elle devient

$$\begin{aligned} q_{sb} &= \beta' \lambda_c \bar{u}_f (\lambda_c^2 \tau_o - (\tau_o)_{cr}) / \gamma_s \\ &= \beta' \bar{u} (\lambda_c^2 \tau_o - (\tau_o)_{cr}) / \gamma_s \end{aligned} \quad (4.61)$$

Cette relation indique que l'expression (3.78) du lit plat pour  $\psi_q$  ( $\psi_q = q_s/q$ ) doit être modifiée en,

$$\psi_q = \beta' \left( \frac{\lambda_c^2 \tau_o - (\tau_o)_{cr}}{\gamma_s h} \right) + \alpha_c \bar{C} \quad (4.62)$$

Par division de (4.61) par (4.60), il vient

$$\frac{q_{sb}}{(q_{sb})_f} = \lambda_c \frac{\eta_* \lambda_c^2 - 1}{\eta_* - 1} \quad (4.63)$$

Comme il apparaît de l'équation (3.46), le ratio  $\beta/\beta'$  n'est pas exactement constant et  $\bar{u}$  et  $u_b$  ne sont pas toujours reliées par le même rapport de proportionnalité.

Il est également admis que  $\bar{u}$  et  $u_b$  décroissent dans une proportion identique en présence de formes de lit. De ce fait, les relations développées ci-dessus sont également utilisées dans l'équation de Bagnold sous sa forme (3.39), en remplaçant simplement  $\beta'$ ,  $\bar{u}$ ,  $u_f$  par  $\beta$ ,  $u_b$ ,  $(u_b)_f$ .