

Chapitre 3

La dynamique des cours d'eau. Aspects théoriques fondamentaux.

Toute déformation d'un cours d'eau alluvial implique un transport sédimentaire. Il est donc utile de rappeler quelques notions essentielles de l'hydraulique et du mouvement des particules solides avant d'aborder plus concrètement les aspects morphologiques de la dynamique alluviale.

Transport sédimentaire

Les particules solides formant les conditions de bord d'un lit alluvial se caractérisent par leur poids et par un coefficient de frottement. Ces particules ne peuvent être mises en mouvement que si la tension de frottement τ_o agissant sur elles est supérieure à une valeur « critique » $(\tau_o)_{cr}$. Cela signifie que les sédiments ne sont remobilisés que sur la partie du périmètre mouillé où

$$\eta_* = \frac{\tau_o}{(\tau_o)_{cr}} > 1 \quad (3.1)$$

Le ratio η_* définit la « force tractrice relative » aussi appelée « intensité d'écoulement relative ». Ainsi, en référence à la figure 3.1, seul le tronçon A'B' du périmètre AA'BB' sera concerné par le transport solide. Les grains de la couche superficielle seront détachés et transportés dans la direction x de l'écoulement. Le détachement des particules est imputable à τ_o et leur transport à la vitesse longitudinale de l'écoulement u .

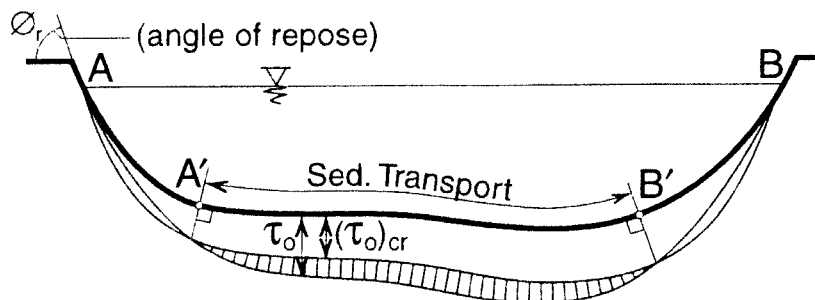


Fig. 3.1: Condition critique de transport dans un lit alluvial

Tant que η_* reste inférieur à une certaine valeur η_{*1} ($1 < \eta_* < \eta_{*1}$), les grains sont transportés en roulant sur le lit ou par saltation selon des trajectoires P_b qui les ramènent au contact du lit. Ce mode de transport connu sous le terme de charriage s'effectue à l'intérieur d'une couche de dimension ϵ ($k_s < z < \epsilon$; cf. Fig.3.2). Lorsque $\eta_* > \eta_{*1}$, certaines particules sont entraînées par diffusion dans la région $\epsilon < z < h$ sous l'effet de la turbulence. Elles suivent des trajectoires aléatoires P_s et constituent la charge en suspension. Il convient de remarquer que la charge en suspension ne se substitue pas au charriage mais qu'elle s'y ajoute.

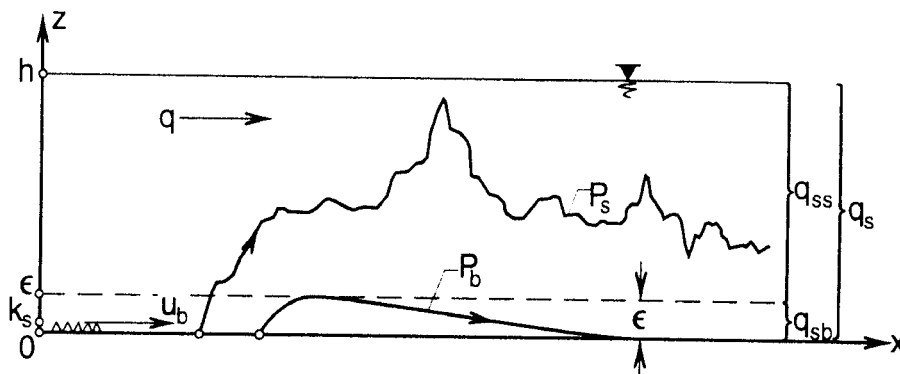


Fig. 3.2: Transport par charriage P_b et en suspension P_s dans l'écoulement

Le débit solide total par unité de largeur q_s est ainsi la somme du débit de charriage q_{sb} et du débit solide en suspension q_{ss} :

$$q_s = q_{sb} + q_{ss} \text{ (avec } q_s \geq q_{sb} ; q_s > q_{ss} \text{)} \quad (3.2)$$

La dimension des débits unitaires est :

$$[q_{si}] = [\text{longueur}] \cdot [\text{vitesse}] \quad (3.3)$$

Écoulement turbulent

Les lois de base du transport sédimentaire ont été développées pour la configuration d'écoulement la plus simple correspondant à un écoulement turbulent bidimensionnel, permanent et uniforme dans un canal prismatique et rectiligne. Bidimensionnel signifie ici que les caractéristiques de l'écoulement ne varient pas sur la direction transversale y . Ces conditions d'écoulement particulières peuvent sembler a priori un peu éloignées de la réalité. Cependant, les profils en travers des rivières naturelles possèdent classiquement une forme trapézoïdale sur les tronçons rectilignes (cf. Fig. 3.3) et la variation des vitesses dans la direction x sont généralement insignifiantes. De même, l'écoulement n'est que faiblement affecté par le frottement latéral sur les berges. Il en résulte une région centrale de largeur B_c où l'écoulement est quasi uniforme et bidimensionnel

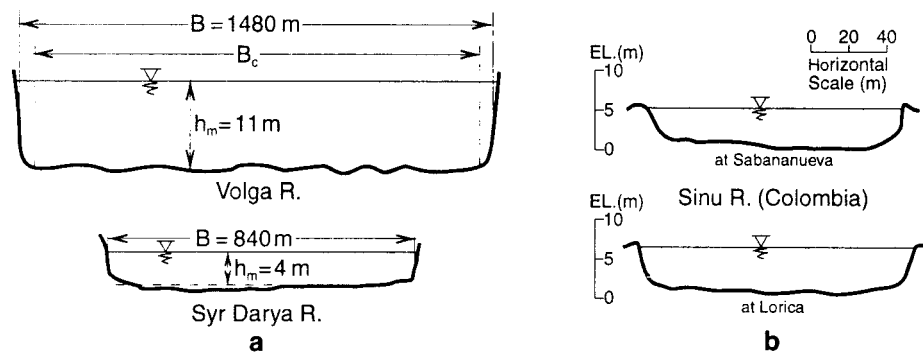


Fig. 3.3: Profils en travers de rivières naturelles (a, selon [21] ; b, selon [11])

Il est admis dans un premier temps que la surface du lit mobile est plate et qu'elle possède une rugosité granulaire k_s qui peut être évaluée (selon [10], [24], [13], [2]) comme

$$k_s \approx 2D \quad (3.4)$$

Tension de frottement

La distribution de la tension de frottement τ ($=\tau_{zx}$) dans l'écoulement bidimensionnel précité (Fig. 3.4) est donnée par l'expression linéaire

$$\tau = \tau_o \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (3.5)$$

La distribution des vitesses u est admise conforme à la loi logarithmique

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{k_s} + B_s = \frac{1}{\kappa} \ln \left(A_s \frac{z}{k_s} \right) \quad (3.6)$$

(avec $\kappa \approx 0.4$; constante de von Karman)

Dans ces expressions,

$$\tau_o = \gamma S h \quad (3.7)$$

où

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_o}{\rho}} = \sqrt{g S h} \quad (\text{vitesse de frottement}) \quad (3.8)$$

et

$$A_s = e^{\kappa B_s} \quad (3.9)$$

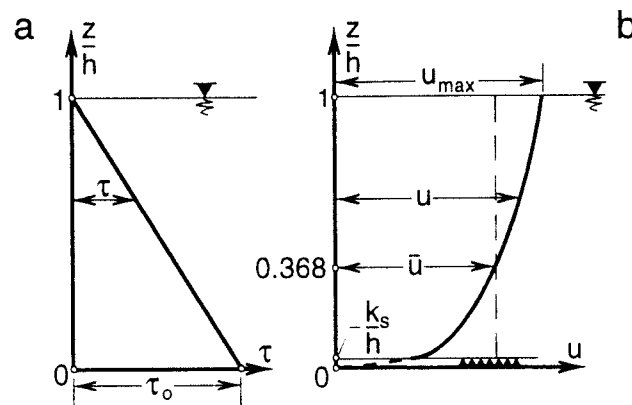


Fig. 3.4: Distribution selon z , a) de la tension de frottement, b) de la vitesse dans la direction de l'écoulement

La fonction de rugosité $B_s = \Phi_B(\text{Re}_*)$, où $\text{Re}_* = v_* k_s / \nu$ est le nombre de Reynolds de la rugosité, est déterminée expérimentalement par la relation de la figure 3.5 et analytiquement sur tout l'intervalle ($0.2 < \log \text{Re}_* < 3.2$) par

$$B_s = (2.5 \ln \text{Re}_* + 5.5) e^{-0.0705 (\ln \text{Re}_*)^{2.55}} + 8.5 \left(1 - e^{-0.0594 (\ln \text{Re}_*)^{2.55}} \right) \quad (3.10)$$

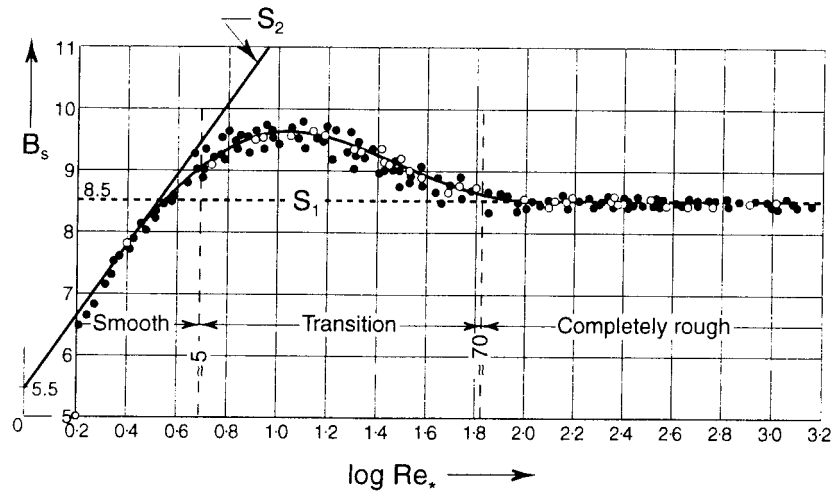


Fig. 3.5: Relation $B_s = \Phi_B(Re_*)$ selon [15]

Lorsque $Re_* \approx 5$, l'écoulement turbulent est en régime hydrauliquement lisse, lorsque $5 < Re_* < 70$ il est en régime de transition et si $Re_* > 70$, le régime est turbulent rugueux.

Vitesse moyenne

La vitesse moyenne sur toute la hauteur d'un écoulement bidimensionnel \bar{u} , est égale à la vitesse rencontrée à la position relative $z/h = e^{-1} = 0.368$, quel que soit le régime de l'écoulement turbulent (cf. [24]),

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(0.368 \frac{h}{k_s}\right) + B_s = \frac{1}{\kappa} \ln\left(0.368 A_s \frac{h}{k_s}\right) \quad (3.11)$$

Dans le cas d'un écoulement turbulent rugueux ($Re_* > 70$), pour lequel $B_s = 8.5$, l'équation (3.11) devient

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(11 \frac{h}{k_s}\right) \approx 7.66 \left(\frac{h}{k_s}\right)^{1/6} \quad (3.12)$$

Le ratio \bar{u}/v_* est appelé le coefficient de frottement adimensionnel de Chézy c_f :

$$c_f = \frac{\bar{u}}{v_*} \quad (3.13)$$

Il convient de remarquer que l'équation (3.11) qui donne la vitesse moyenne \bar{u} de l'écoulement bidimensionnel sur un lit plat de rugosité $k_s \approx 2D$ exprime simultanément le coefficient de frottement de l'écoulement :

$$c_f = \frac{1}{\kappa} \ln \left(0.368 \frac{h}{k_s} \right) + B_s \quad (3.14)$$

En utilisant l'équation (3.8), l'équation (3.13) peut s'écrire sous la forme de l'équation de Chézy

$$\bar{u} = c_f \sqrt{gSh} \quad (3.15)$$

Frottement et résistance

Lorsque la surface du lit mobile est ondulée, c'est-à-dire marquée par la présence de rides, de dunes ou de toute autre forme périodique dans la direction x de l'écoulement, sa rugosité effective k_s est plus petite que le coefficient de frottement c_f . Dans ce cas, l'équation de frottement (3.15) doit être généralisée en une équation de résistance

$$\bar{u} = c \sqrt{gSh} \quad (3.16)$$

L'évaluation de k_s et c sera présentée au chapitre 4.

L'équation de résistance (3.16) peut être exprimée sous forme adimensionnelle comme

$$Fr = c^2 S \quad (3.17)$$

Où le nombre de Froude Fr vaut

$$Fr = \frac{\bar{u}^2}{gh} \quad (3.18)$$

Il convient de remarquer que le nombre de Froude reflète la structure énergétique de l'écoulement. En effet l'énergie cinétique par unité de volume du fluide peut être exprimée par $e_k = (1/2)\rho\bar{u}^2$ alors que son énergie potentielle vaut $e_p = \rho gh$. Le nombre de Froude est ainsi l'expression du rapport e_k/e_p .

Mouvement bi-phasique bi-dimensionnel

Écoulement bi-phasique

Le déplacement simultané du fluide et de sédiments constitue un écoulement bi-phasique. Un mouvement bi-phasique, bidimensionnel, permanent, uniforme et rectiligne peut être décrit à l'aide sept paramètres caractéristiques [24], [25], [26],

$$\rho, \nu, \rho_s, D, \gamma, h, v_* \quad (3.19)$$

et toute grandeur physique A' liée à ce mouvement peut être exprimée comme

$$A' = f_{A'}(\rho, \nu, \rho_s, D, \gamma, h, v_*) \quad (3.20)$$

En considérant le mouvement solide en masse et non plus le déplacement de grains individuels, la masse volumique du grain ρ_s peut être exclue. La liste des paramètres (3.19) se réduit alors à

$$\rho, \nu, D, \gamma, h, v_* \quad (3.21)$$

et la grandeur physique A' devient A

$$A = f_A(\rho, \nu, D, \gamma, h, v_*) \quad (3.22)$$

Selon le théorème π , la relation (3.22) peut être exprimée sous forme adimensionnelle comme

$$\pi_A = \Phi_A(X, Y, Z) \quad (3.23)$$

avec les variables adimensionnelles

$$X = \frac{v_* D}{\nu}, \quad Y = \frac{\rho v_*^2}{\gamma_s D}, \quad Z = \frac{h}{D} \quad (3.24)$$

La contre partie adimensionnelle π_A de A étant

$$\pi_A = \rho^{X_A} \nu_*^{Y_A} D^{Z_A} \cdot A \quad (3.25)$$

Où X_A , Y_A et Z_A doivent être déterminés de manière à ce que π_A devienne adimensionnel.

Condition critique de charriage

Supposons que A exprime le débit solide q_s . A partir des équations (3.23) et (3.25) il résulte

$$\pi_{q_s} = \frac{q_s}{v_* D} = \bar{\phi}_{q_s}(X, Y, Z) \quad (3.26)$$

En multipliant les deux côtés de cette équation par $\sqrt{\rho v_*^2 / \gamma_s D} = \sqrt{Y}$, elle devient

$$\phi = \frac{\rho^{1/2} q_s}{\gamma_s^{1/2} D^{3/2}} = \phi_{q_s}(X, Y, Z) \quad (3.27)$$

Avec $\phi_{q_s} = \sqrt{Y} \cdot \bar{\phi}_{q_s}$

La combinaison adimensionnelle du terme de gauche constitue le paramètre ϕ de Einstein [8], [9] qui présente l'avantage d'être relié à q_s par le facteur de proportionnalité $\rho^{1/2}/(\gamma_s^{1/2} D^{3/2})$ qui reste invariable lorsque le débit varie.

Pour la condition d'initiation du transport solide, c'est-à-dire à l'état critique, q_s est égal à zéro et $Z=h/D$ n'est pas un paramètre déterminant. De fait, l'état critique est défini par

$$(\tau_o)_{cr} = \gamma(hS)_{cr} \quad (= \rho v_{*cr}^2) \quad (3.28)$$

qui peut être atteint pour une valeur de h quelconque par ajustement de la pente du lit S . En posant $q_s \sim \phi = 0$, en excluant Z et en marquant X et Y de l'indice cr , l'équation (3.27) devient

$$0 = \phi_{q_s}(X_{cr}, Y_{cr}), \quad \text{soit} \quad Y_{cr} = \Phi(X_{cr}) \quad (3.29)$$

qui est la fonction de Shields d'initiation du mouvement, où

$$X_{cr} = \frac{v_{*cr} D}{v} \quad \text{et} \quad Y_{cr} = \frac{\rho v_{*cr}^2}{\gamma_s D} = \frac{(\tau_o)_{cr}}{\gamma_s D} \quad (3.30)$$

la courbe expérimentale représentant la fonction (3.29) est présentée sur la figure 3.6.

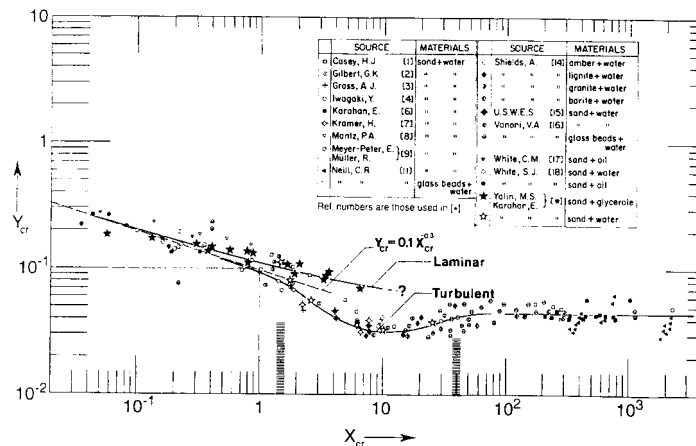


Fig. 3.6: Diagramme de Shields (selon [23])

Une variable adimensionnelle peut toujours être remplacée par une fonction de cette variable et de quelques unes ou de toutes les variables restantes. Considérons par exemple la combinaison suivante de X et Y

$$E^3 = \frac{X_{cr}^2}{Y_{cr}} = \frac{\gamma_s D^3}{\rho v^2} \tag{3.31}$$

Cette combinaison exprime l'influence des phases solide (γ_s , D) et liquide (ρ , v) et ne varie pas en fonction de l'état d'écoulement. La fonction E^3 peut aussi être exprimée en termes de X et Y pour la condition critique :

$$E^3 = \frac{X_{cr}^2}{Y_{cr}}, \text{ soit } X_{cr} = \sqrt{E^3 Y_{cr}} \tag{3.32}$$

En éliminant X_{cr} entre (3.29) et (3.32),

$$Y_{cr} = \Phi\left(\sqrt{E^3 Y_{cr}}\right), \text{ soit } Y_{cr} = \psi(E) \tag{3.33}$$

Cette fonction modifiée d'initiation du transport solide offre l'avantage de définir Y_{cr} et ainsi v_{*cr} sans itération. La représentation graphique de la fonction (3.33) est donnée à la figure 3.7.

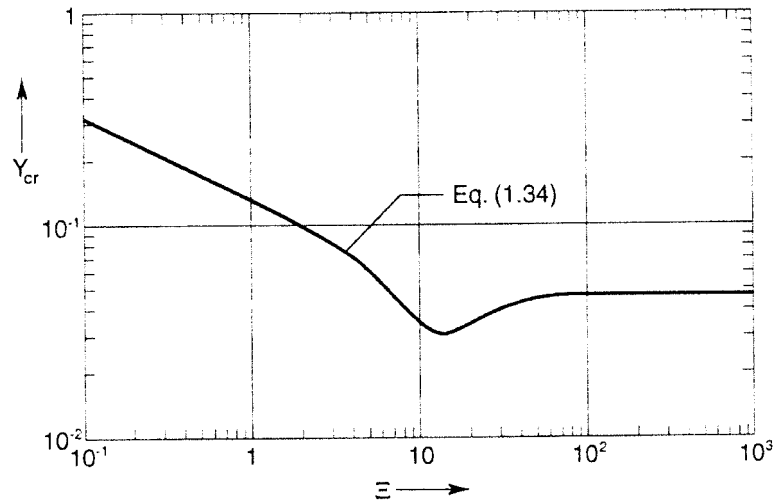


Fig. 3.7: Diagramme de Shields modifié

Cette relation $Y_{cr} = \psi(E)$ peut être exprimée analytiquement sur toute la gamme de E par l'équation

$$Y_{cr} = 0.13E^{-0.392}e^{-0.015E^2} + 0.045(1 - e^{-0.068E}) \quad (3.34)$$

Remarquons que l'intensité d'écoulement relative $\eta_* = \tau_o / (\tau_o)_{cr}$ peut s'écrire à l'aide de (3.33) sous la forme

$$\eta_* = \frac{\tau_o}{(\tau_o)_{cr}} = \frac{Y}{Y_{cr}} = \frac{Y}{\psi(E)} \quad (3.35)$$

La résolution des équations (3.31) et (3.35) donne

$$X = \sqrt{E^3 \eta_* \psi(E)} \quad \text{et} \quad Y = \eta_* \psi(E) \quad (3.36)$$

en substituant ces valeurs dans l'équation de base (3.23) celle-ci devient

$$\pi_A = \phi_A \left(\sqrt{E^3 \eta_* \psi(E)}, \eta_* \psi(E), Z \right) \quad (3.37)$$

soit

$$\pi_A = \overline{\phi}_A(E, \eta_*, Z) \quad (3.38)$$

qui indique que si π_A est une fonction de X et Y , elle peut aussi être considérée comme une fonction de E et ρ_* . Cette dernière formulation sera souvent utilisée par la suite.

Débit de charriage. Formule de Bagnold.

Le débit de charriage q_{sb} transporté dans le voisinage ϵ d'un lit plat (Fig. 3.2) est considéré en référence à la formule de Bagnold

$$q_{sb} = \beta u_b (\tau_o - (\tau_o)_{cr}) / \gamma_s \quad (3.39)$$

où u_b est la vitesse moyenne dans la couche verticale proche du fond, $k_s < z < \epsilon$, et β une fonction de E . En écoulement turbulent rugueux, cette fonction se réduit à $\beta=0.5$. La représentation graphique de la fonction $\beta=\phi_B(E)$ peut être trouvée dans [1] et [24]. La formule de Bagnold a été choisie ici en raison de sa simplicité et du fait qu'elle est a priori aussi bonne que d'autres, mais surtout parce qu'elle reflète clairement le concept de charriage. En effet, q_{sb} peut être défini par le produit du volume des grains en mouvement par unité de surface du lit V_s et de la vitesse de déplacement de ce volume u_s : $q_{sb}=V_s \cdot u_s$. La relation (3.39) implique clairement que $u_s \sim u_b$ et que $V_s \sim (\tau_o - (\tau_o)_{cr}) / \gamma_s$. Ces deux liens de proportionnalité sont réalistes et dimensionnellement corrects. La vitesse de fond u_b peut être quantifiée comme la vitesse moyenne dans la couche ϵ ,

$$u_b \approx \frac{u_{k_s} + u_{\epsilon}}{2} \quad (3.40)$$

où u_{k_s} et u_{ϵ} , qui correspondent à $z = k_s \approx 2D$ et $z = \epsilon$, peuvent être exprimées à partir de l'équation (3.6) comme

$$u_{k_s} = v_* B_s \text{ et } u_{\epsilon} \approx v_* \left(\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\epsilon}{2D} \right) + B_s \right) \quad (3.41)$$

Lorsque η_* est juste supérieur à un, le mouvement des grains s'effectue à proximité du lit (ϵ est de l'ordre de deux à quatre D) et u_{ϵ} est très proche de u_{k_s} , il est alors possible d'admettre

$$u_b \approx u_{k_s} (= v_* B_s) \quad (3.42)$$

comme cela a été fait dans le développement original de Bagnold [1]. Dans ce cas, l'équation (3.39) qui peut être exprimée sous forme adimensionnelle comme

$$\phi = (B_s \beta) Y^{1/2} (Y - Y_{cr})$$

$$\text{ou } \phi = \left[(B_s \beta) Y_{cr}^{3/2} \right] \eta_*^{1/2} (\eta_* - 1) \quad (3.43)$$

ne dépend pas de $h \sim Z$. La valeur de $q_{sb} \sim \phi$, n'est déterminée que par τ_o ($\propto v_*^{1/2} \propto Y$) et non par la vitesse moyenne de l'écoulement \bar{u} , qui

est déterminée aussi bien par τ_o que par $h \sim Z$ (cf. équ. (3.11) qui contient $v_* = \sqrt{\tau_o / \rho}$ et $h/k_s \approx Z/2$).

Cependant, le plus souvent, et en particulier lorsque le lit n'est pas plat mais marqué par la présence de rides ou de dunes (car Z est grand), l'épaisseur de la couche de charriage ϵ peut être beaucoup plus grande que D ($\approx k_s/2$). Par exemple : $h=0.5\text{m}$, $\epsilon=0.5\text{cm}$, $D=0.2\text{mm}$, d'où $Z=2500 \gg \epsilon/h=0.01$; $\epsilon/D=25$. Dans de tels cas, u_ϵ et par conséquent u_b et q_{sb} sont certainement influencés par Z et ainsi par \bar{u} . En effet, il résulte de (3.41) et (3.11) que

$$\frac{u_\epsilon}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\epsilon}{k_s} \right) + B_s = \frac{\bar{u}}{v_*} - \frac{1}{\kappa} \ln \left(0.368 \frac{h}{\epsilon} \right) \quad (3.44)$$

Pour cette raison, l'équation (3.39) qui contient U_b est souvent remplacée par la forme

$$q_{sb} = \beta' \bar{u} (\tau_o - (\tau_o)_{cr}) / \gamma_s \quad (3.45)$$

qui contient la vitesse moyenne \bar{u} dont la définition ne souffre d'aucune ambiguïté. La relation entre β' et β peut être établie à partir des équations (3.11), (3.40) et (3.41),

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{1 + \frac{1}{2\kappa B_s} \ln \left(\frac{\epsilon}{2D} \right)}{1 + \frac{1}{\kappa B_s} \ln \left(0.368 \frac{h}{2D} \right)} \quad \left(= \frac{u_b}{u} \right) \quad (3.46)$$

Dans la plupart des cas pratiques, les caractéristiques de l'écoulement (h , S , τ_o , \bar{u} , etc.) ne varient dans le temps que graduellement. Seul ce type de comportement est considéré ici. De ce fait, les relations de régime permanent seront admises comme applicables même les conditions d'écoulement varient dans le temps. Ainsi, si (\bar{u}_1 , τ_{o1}) au temps t_1 , passe lentement à (\bar{u}_2 , τ_{o2}) au temps t_2 , les débits de charriage correspondant $(q_{sb})_1$ et $(q_{sb})_2$ pourront être calculés à partir de l'équation (3.45) en admettant des conditions d'écoulement stationnaires.

Formes vectorielles du débit de charriage

Écoulement non uniforme

Considérons maintenant un écoulement à surface libre non uniforme en admettant que la surface du lit est toujours plate. La direction et la

grandeur de la vitesse d'écoulement varie d'un point $P(x ; y ; z)$ à l'autre, elle doit donc être considérée comme un vecteur

$$\mathbf{U} = i_x u + i_y v + i_z w \quad (3.47)$$

où i_x, i_y, i_z sont les vecteurs unitaires selon x, y, z respectivement et u, v et w les composantes scalaires de \mathbf{U} . En général, u, v et w varient en fonction de x, y et z .

En se concentrant prioritairement sur les conditions rencontrées dans la région centrale d'un canal large, w peut être admis comme négligeable et \mathbf{U} peut être défini comme

$$\mathbf{U} = u i_x + v i_y \quad (3.48)$$

où, en général, $u = \phi_u(x, y, z)$ et $v = \phi_v(x, y, z)$. Il convient de remarquer que la condition $w = 0$ ne signifie pas que \mathbf{U} ne varie pas avec z .

Écoulement sur un lit plat

Dans le cas d'un lit plat, les vecteurs $\mathbf{U}_b = i_b u_b, \boldsymbol{\tau}_o = i_\tau \tau_o, \mathbf{q}_{sb} = i_{qsb} q_{sb}$ en un même point $P(x, y)$ de la surface du lit ont tous la même direction, ils sont colinéaires :

$$i_b = i_\tau = i_{qsb} \quad (3.49)$$

En multipliant les deux côtés de l'équation (3.39) par $i_{qsb} = i_b$, elle devient,

$$\mathbf{q}_{sb} = \mathbf{u}_b \left[\beta \left(\tau_o - (\tau_o)_{cr} \right) / \gamma_s \right] \quad (3.50)$$

ce qui est la forme vectorielle de la formule de charriage de Bagnold. Elle peut être utilisée pour tous les écoulements à surface libre sur lit mobile plat.

Débit solide en suspension

Concentration volumétrique

Définissons par C la concentration volumétrique adimensionnelle de particules solides en suspension dans un endroit de l'écoulement et \mathbf{U}_{ss} la vitesse de déplacement de ce nuage de particules à ce même endroit. Si les grains sont suffisamment petits, \mathbf{U}_{ss} peut être identifiée à la vitesse moyenne temporelle locale de l'écoulement \mathbf{U} :

$$\mathbf{U}_{ss} = \mathbf{U} \quad (3.53)$$

Considérons une unité de surface verticale en un point P de l'espace, dont le vecteur uniforme normale est identique à i_x (Fig. 3.10). En considérant l'équation (3.53), le débit volumétrique en suspension q_{ss} passant à travers cette surface unitaire peut être exprimé comme

$$q_{ss}^* = nU_{ss}C = nUC = i_x UC = uC \quad (3.54)$$

ce qui, dans le cas d'un écoulement bi phasique, bi dimensionnel, permanent et uniforme donne pour q_{ss} ,

$$q_{ss} = \int_{\epsilon}^h q_{ss}^* dz = \int_{\epsilon}^h Cudz \quad (3.55)$$

Dans le cas d'une charge en suspension développée naturellement, c'est-à-dire sans intervention externe, la valeur de C n'excède généralement pas ≈ 0.02 [18] et u peut être évalué par l'équation (3.6)

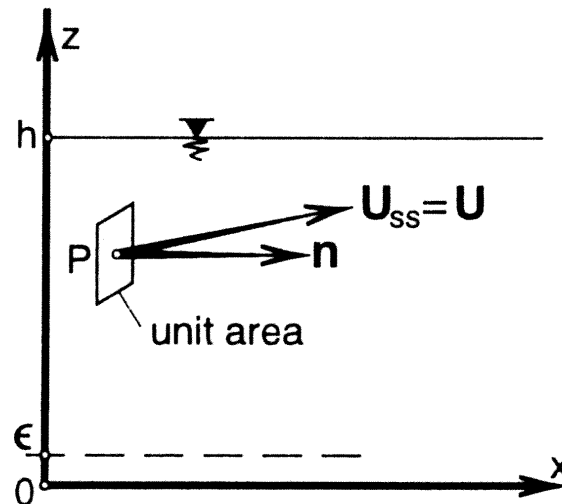


Fig. 3.10: Surface unitaire verticale en un point P

La relation (3.55) peut être écrite sous forme vectorielle comme

$$\mathbf{q}_{ss} = \int_{\epsilon}^h \mathbf{q}_{ss}^* dz = \int_{\epsilon}^h C\mathbf{U}dz \quad (3.56)$$

où \mathbf{U} exprime les composantes selon x et y, conformément à l'équation (3.48).

Considérons les vecteurs \mathbf{U} en tous les points de l'axe z passant par P (x,y) sur l'intervalle $\epsilon < z < h$. Si tous ces vecteurs sont colinéaires, le vecteur unitaire i_s dans la direction de l'écoulement est identique pour tout z $[\epsilon, h]$ et l'équation (3.56) peut s'écrire

$$q_{ss} = i_s \int_{\epsilon}^h CU dz \quad (3.57)$$

En appliquant le théorème de la valeur moyenne du calcul intégral [17] selon lequel

$$\int_a^b \psi(z) f(z) dz = \psi(z_m) \int_a^b f(z) dz \quad (3.58)$$

où $a < z_m (= \text{const}) < b$

pour $\psi(z) = C$ et $f(z) = U$, l'expression (3.58) devient

$$\int_{\epsilon}^h CU dz = \bar{C} \int_{\epsilon}^h U dz = \bar{C} h \bar{U} \quad (3.59)$$

où la valeur moyenne $\bar{C} = \psi(z_m)$ est très proche mais pas exactement égale à la concentration moyenne habituelle \bar{C} . Ce fait peut être considéré en introduisant un coefficient $\alpha_c (= \bar{C} / \bar{C})$ proche de l'unité. En considérant que $\bar{U} = i_s \bar{U}$, l'équation (3.57) peut s'écrire

$$q_{ss} = \alpha_c h \bar{U} \bar{C} \quad (3.60)$$

Distribution verticale de la concentration

Considérons la distribution de concentration verticale C développée naturellement sur l'intervalle $\epsilon < z < h$. Plusieurs expressions sont proposées dans la littérature, parmi lesquelles celle de Einstein-Rouse est la plus populaire [14], [4], [3], [5],

$$C = C_{\epsilon} \left[\frac{\epsilon h - z}{z h - \epsilon} \right]^m \quad (3.61)$$

Avec $m = 2.5 w_s / v_*$

où C_{ϵ} est la concentration à $z = \epsilon$ et w_s la vitesse de sédimentation des grains. Les courbes de la figure 3.11 donnent une idée de la distribution de C selon z .

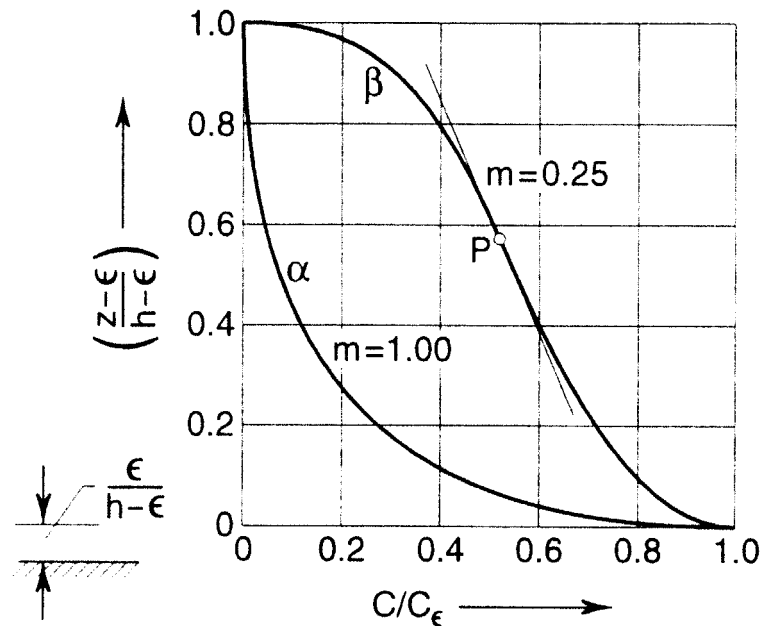


Fig. 3.11: Distribution verticale de la concentration de la charge en suspension

Pour C_ϵ et ϵ , les relations suivantes développées par L.C. van Rijn [19], [20] pour un lit plat peuvent être adoptées :

$$C_\epsilon = 0.05E^{-1}(\eta_* - 1) \quad (3.62)$$

$$\frac{\epsilon}{D} = 0.3E^{0.7}(\eta_* - 1)^{0.5} \quad (3.63)$$

Equation de continuité de transport

Ecoulement bi-phasique non stationnaire et non uniforme

Considérons un écoulement bi phasique non stationnaire et non uniforme mais graduellement varié. Définissons un volume de contrôle (CV) vertical prismatique, de surface de base A et de hauteur h (Fig. 3.12)

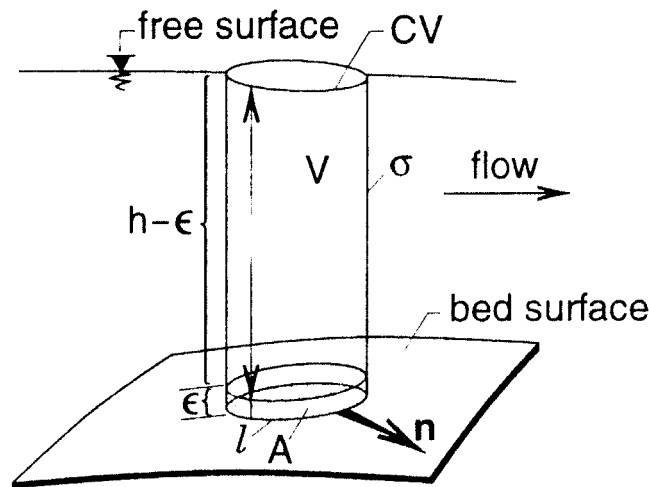


Fig. 3.12: Volume de contrôle vertical sur toute la hauteur de l'écoulement

Cet espace de contrôle CV de volume V est délimité par une enveloppe latérale de surface σ , définie en tout point par son vecteur normal n . Les variations possibles de h et ϵ ($\ll h$) à l'intérieur de A sont admises comme négligeables.

Le charriage net F_b passant à un instant t à travers la partie inférieure ϵ de σ est défini par

$$F_b = \int_l n q_{sb} dl = \int_A \nabla q_{sb} dA \quad (3.64)$$

où l est le périmètre de A .

Le débit net en suspension F_s passant à un instant t à travers la partie supérieure $(h - \epsilon)$ de σ est défini par

$$F_s = \int_l n \left(\int_{\epsilon}^h q_{ss}^* dz \right) dl = \int_l n q_{ss} dl = \int_A \nabla q_{ss} dA \quad (3.65)$$

où la deuxième étape se réfère à l'équation (3.56)

Le volume de matière granulaire accumulée dans le volume de contrôle par unité de temps dû à q_{sb} , réciproquement $-F_b$, provoque l'élévation du niveau du lit (z_b). En exprimant la vitesse moyenne d'incrément positive du niveau du lit par W_b , $-F_b$ peut s'écrire,

$$-F_b = (1 - p) W_b A \quad (3.66)$$

où p (< 1) est la porosité du matériau granulaire.

Le volume de matière granulaire accumulée dans le volume de contrôle par unité de temps dû à q_{ss} , réciproquement $-F_s$, provoque d'une part l'élévation du niveau du lit avec une vitesse positive W_s et d'autre part l'augmentation J_s du volume de la charge en suspension,

$$-F_s = (1-p)W_s A + J_s \quad (3.67)$$

où J_s peut être déterminé comme

$$J_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_V C dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_A \left(\int_{\epsilon}^h C dz \right) dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_A (h\bar{C}) dA = \int_A \frac{\partial(h\bar{C})}{\partial t} dA \quad (3.68)$$

où \bar{C} est la concentration moyenne sur la verticale et où le terme $(h-\epsilon)\bar{C}$ est remplacé par $h\bar{C}$ (pour $\epsilon \ll h$). Concrètement, la vitesse de déplacement W_s de la surface du lit en un point P (x, y), due à q_{ss} est égale à la différence de volume des particules qui se déposent ($w_s C$) et qui se détachent ($v_t (\delta C / \delta z)_{z=\epsilon}$) de l'unité de surface par unité de temps.

Etant donné que la vitesse de déplacement en un point P(x,y) est exprimée par $W = \delta z_b / \delta t$, la vitesse de déplacement verticale W_A de la surface A peut être exprimée par

$$W_A = \frac{1}{A} \int_A W dA = \frac{1}{A} \int_A \frac{\partial z_b}{\partial t} dA \quad (3.69)$$

Toute modification de l'altitude du lit du volume de contrôle est exclusivement due à q_{sb} et q_{ss} et la vitesse W_A est par conséquent la somme algébrique de W_b et W_s . A partir des équations (3.66) et (3.67) il est par conséquent possible d'écrire

$$(1-p)W_A = (1-p)(W_b + W_s) = -\frac{1}{A}(F_b + F_s + J_s) \quad (3.70)$$

En substituant W_A , F_b , F_s et J_s par leurs expressions (3.69), (3.64), (3.65) et (3.68), cette relation devient

$$\int_A \left[(1-p) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \nabla q_{sb} + \nabla q_{ss} + \frac{\partial(h\bar{C})}{\partial t} \right] dA = 0 \quad (3.71)$$

et comme la surface A est arbitraire

$$(1-p) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \nabla q_{sb} + \Delta q_{ss} + \frac{\partial(h\bar{C})}{\partial t} = 0 \quad (3.72)$$

ce qui correspond à la forme générale de l'équation de continuité du transport.

Par la suite, il sera généralement fait référence aux cas où $\delta(\bar{h} - \bar{C})/\delta t$ peut être négligé (\bar{C} permanent ou négligeable). L'équation (3.72) pourra alors être utilisée dans sa forme simplifiée

$$(1-p)W = (1-p) \frac{\partial z_b}{\partial t} = -\nabla q_s \quad (3.73)$$

où $q_s = q_{sb} + q_{ss}$.

En outre, les vecteurs \bar{U} , U_b , q_{sb} et q_{ss} seront le plus souvent admis colinéaires et pourront s'exprimer comme $\bar{U} = i_s \bar{U}$, $U_b = i_s U_b$, $q_{sb} = i_s q_{sb}$ et $q_{ss} = i_s q_{ss}$ (où i_s est le vecteur unitaire des lignes de courant (s) moyennées sur la verticale du point P(x,y) considéré.

Ceci conduit aux considérations suivantes :

Puisque q_s est une fonction fortement croissante de \bar{U} , la valeur positive ou négative de $\delta \bar{U}/\delta s$ est invariablement associée avec la valeur positive ou négative de $\delta q_s/\delta s$ et en conséquence, de ∇q_s . Ainsi l'équation (3.73) indique que.

1. Si l'écoulement au point P(x,y) est accéléré convectivement, c'est-à-dire

$$\text{si } \frac{\partial \bar{U}}{\partial S} > 0 \text{ et ainsi } \nabla q_s > 0, \text{ alors } \frac{\partial z_b}{\partial t} < 0 \text{ ..(érosion)}$$

2. Si l'écoulement au point P(x,y) est décéléré convectivement, c'est-à-dire

$$\text{si } \frac{\partial \bar{U}}{\partial S} < 0 \text{ et ainsi } \nabla q_s < 0, \text{ alors } \frac{\partial z_b}{\partial t} > 0 \text{ ..(dépôt)}$$

3. Si l'écoulement est uniforme, $\frac{\partial U}{\partial S} = 0$ et aucun déplacement de la surface du lit ne se produit.

Débit solide total

Il convient maintenant d'exprimer q_s dans l'équation (3.73) par des termes permettant de le quantifier.

A partir des équations (3.50) et (3.60),

$$q_s = q_{sb} + q_{ss} = U_b \beta (\tau_o - (\tau_o)_{cr}) / \gamma_s + \bar{U} \alpha_c h \bar{C} \quad (3.74)$$

Puisque U_b et \bar{U} sont admis colinéaires,

$$U_b = i_b U_b = (i_s \bar{U}) \frac{\beta'}{\beta} = \bar{U} \frac{\beta'}{\beta} \quad (3.75)$$

L'équation (3.74) peut s'écrire

$$q_s = (h\bar{U})\psi_q \quad (3.76)$$

où la fonction adimensionnelle ψ_q exprime le ratio du débit solide spécifique q_s et du débit liquide spécifique $q (=h \bar{U})$,

$$\psi_q = \frac{q_s}{q} \quad (3.77)$$

ou encore

$$\psi_q = \beta' \left(\frac{\tau_o - (\tau_o)_{cr}}{\gamma_s h} \right) + \alpha_c \bar{C} \quad (3.78)$$

Par différenciation, l'équation (3.76) devient

$$\nabla q_s = (h\bar{U})\nabla \psi_q + \psi_q \nabla (h\bar{U}) = (h\bar{U})\nabla \psi_q \quad (3.79)$$

car $\nabla(h \bar{U}) = \nabla q = 0$ en vertu de la continuité. Il peut être remarqué de l'équation (3.79) que si en chaque point P(x,y) les vecteurs \bar{U} et $\nabla \psi_q$ sont perpendiculaires l'un à l'autre, alors $\nabla q_s = 0$, et ainsi $W = \delta z_b / \delta t = 0$. Lorsque la topographie conduit à cette situation, cela signifie que le lit a atteint son état d'équilibre.

Écoulement à ondulation interne périodique

Considérons un écoulement turbulent bi dimensionnel sur un lit plat (au temps $t=0$) dans un canal ouvert rectiligne. Supposons que cet écoulement, en principe uniforme, acquière une non uniformité interne périodique selon x. Les lignes de courants, initialement rectilignes, se déforment selon un mouvement ondulé (Fig. 3.13a) de longueur d'onde L et de faible amplitude. La manière dont une telle déformation peut être initiée sera expliquée sous 3.1.1. Il sera uniquement question ici de la manière dont cette ondulation peut affecter la surface du lit. Les vitesses de ce type d'écoulement varient périodiquement selon x. Ainsi, q_s , $\nabla q_s (= \delta q_s / \delta x)$ et la composante verticale de vitesse W varient également autour d'une valeur moyenne nulle (Fig. 1.13b). Cela signifie que le lit initialement plat doit se déformer au cours du temps de manière ondulée et qu'il sera marqué par la présence de vagues de sable de longueur L.

Par leur apparition, les formes du lit influenceront à leur tour la structure de l'écoulement et ainsi son action sur le lit et ainsi de suite.

Cet ajustement réciproque se poursuit jusqu'à atteindre un état d'équilibre après un certain temps $t = T_{\Delta}$. Cette durée de développement des formes du lit implique qu'aucune variation nouvelle de l'écoulement ou du lit ne se produira pour $t > T_{\Delta}$.

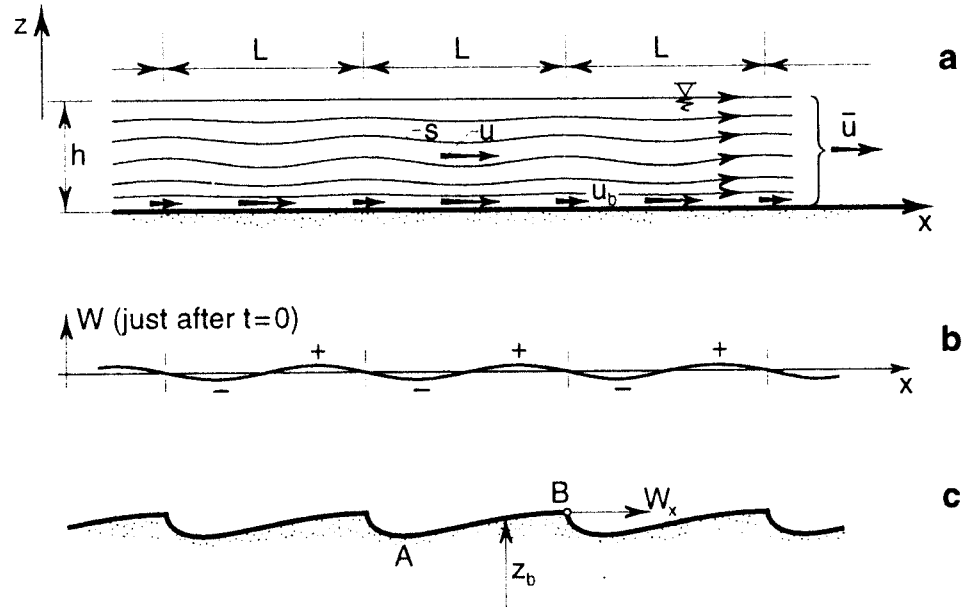


Fig. 3.13: Déformation du lit sous l'effet d'une ondulation de l'écoulement

Conséquences d'un lit ondulé

Considérons les formes de lit bi-dimensionnelles développées au temps $t > T_{\Delta}$ et supposons que $q_s = q_{sb}$. L'équation (3.73) permet d'écrire

$$(1-p) \frac{\partial z_b}{\partial t} = -\frac{\partial q_{sb}}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial q_{sb}}{\partial x} + (1-p) \frac{\partial z_b}{\partial t} = 0 \quad (3.80)$$

Connue comme l'équation de Exner-Polya.

Admettons que les formes de lit sont périodiques et qu'elles se déplacent selon x avec une vitesse constante W_x , sans changer de taille ni de forme (Fig. 3.13 c). Alors,

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = -\frac{\partial z_b}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial z_b}{\partial x} W_x \quad (3.81)$$

et l'équation (3.80) devient

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} (q_{sb} - (1-p)W_x z_b) = 0 \quad (3.82)$$

ce qui donne, pour un observateur se déplaçant avec la forme de lit

$$q_{sb} - (1-p)W_x z_b = \text{const.} \quad (3.83)$$

Etant donné que l'écoulement converge le long de la partie montante AB de la forme, la valeur maximale de q_{sb} se rencontre au sommet de la crête B, où Z_b est aussi maximal, donc

$$(q_{sb})_{\max} - (1-p)W_x (z_b)_{\max} = \text{const.} \quad (3.84)$$

Par soustraction de (3.83) à (3.84), il vient

$$\frac{(q_{sb})_{\max} - q_{sb}}{(Z_b)_{\max} - z_b} = (1-p)W_x \quad (3.85)$$

où le terme de droite est constant. L'équation (3.85) indique que la forme de la structure migrante est étroitement associée avec la distribution du charriage sur elle même. Un déficit de q_{sb} est lié en proportion constante au déficit sur z_b .

Problèmes relatifs au chapitre 3

Problème 3.1

Différentes équations peuvent être utilisées pour calculer la perte de charge d'un écoulement turbulent à surface libre dans un canal de grande largeur ($R \approx h$) :

$$\bar{u} = c\sqrt{gSh} \quad \text{Chézy}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{n} h^{2/3} S^{1/2} \quad \text{Manning-Strickler}$$

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{8}{f}} \sqrt{ghS} \quad \text{Darcy-Weisbach}$$

Déterminez les relations entre c et n , c et f et n et f et commentez les.

Problème 3.2

Un canal à écoulement bi dimensionnel a une pente $S=0.15 \cdot 10^{-4}$. Le grain caractéristique du lit a un diamètre $D_{50} = 0.18\text{mm}$. A quelle profondeur d'écoulement le transport solide est-il initié ?

Problème 3.3

Considérons l'écoulement permanent et uniforme bi-dimensionnel dans la partie centrale d'une rivière de grand largeur. La profondeur d'écoulement vaut $h = 0.8\text{m}$ et la pente $S=0.0002$. Le lit est constitué de sable uniforme caractérisé par un diamètre de grains $D = 0.3\text{mm}$ et considéré comme plat. Calculez,

- a) Le débit solide de charriage q_{sb} à l'aide de la formule de Bagnold
- b) L'épaisseur ϵ de la couche de charriage
- c) La concentration C_ϵ à $Z=\epsilon$
- d) Le débit volumétrique spécifique en suspension q_{ss} en admettant une vitesse de sédimentation $W_s = 0.03\text{m/s}$.

Références bibliographiques du chapitre 3

Textbook : Yalin, S et Ferreira da Silva, A.M. : Fluvial processes, Monograph of IAHR, 2001