

Chapitre 2

L'hydraulique des cours d'eau. Aspects théoriques fondamentaux.

Écoulements en nappe libre

Ce type d'écoulement est caractérisé par la présence d'une frontière commune et permanente écoulement-atmosphère (canaux, égouts, canaux et rivières). Si cela ne remet nullement en cause le principe des équations appliquées aux écoulements en charge, il reste néanmoins que les problèmes à résoudre comportent un degré de liberté supplémentaire du fait que la géométrie des écoulements n'est plus entièrement déterminée par les parois comme dans le cas des écoulements en charge. Il s'agira dès lors de trouver les relations entre les paramètres de l'écoulement et la géométrie du support, fondées sur les lois générales déjà connues mais en introduisant, le cas échéant, une information complémentaire.

Comme pour les écoulements en charge nous pourrions trouver des cas où le frottement est déterminant pour la dissipation de l'énergie. Dans d'autres ce sera la configuration géométrique locale du support (lit). Par comparaison avec les écoulements en charge, l'équivalent du tuyau est le lit prismatique et aux pièces spéciales (singularités) correspondent seuils, chutes, rétrécissements et élargissements, ruptures de pente, coudes et leurs combinaisons. D'où la classification en usage pour les écoulements en nappe libre :

1. écoulements uniformes ;
2. écoulements variés dits aussi "brusquement" variés ;
3. écoulements graduellement variés.

La troisième catégorie définit une situation intermédiaire, propre aux écoulements en nappe libre, où le passage d'une condition d'écoulement à une autre se fait graduellement, sur une distance relativement longue. La forme générale de la ligne d'eau sera conditionnée par les particularités géométriques du lit mais le frottement ne pourra pas être ignoré. Les catégories 2 et 3 peuvent être groupées dans la classe dite des écoulements non-uniformes.

Contrairement aux écoulements en tuyaux qui constituent le cas le plus fréquent des écoulements en charge, nous rencontrons rarement dans la nature des écoulements vraiment uniformes. Ceux-ci sont cependant beaucoup utilisés, à cause de leur relative simplicité, comme modèle lors d'une première approche ou encore comme élément de référence.

Écoulements uniformes

Dans les écoulements uniformes en lit prismatique rectiligne la profondeur et la vitesse ou encore l'énergie cinétique, restent par définition constantes le long de l'écoulement. Dans ces conditions les pertes de charge sont de type linéaire et la répartition des pressions en profondeur est hydrostatique $p = \gamma z$. En appliquant le principe de conservation d'énergie, nous pouvons écrire - voir Figure 2.1 :

$$H_0 = z + y + \frac{v^2}{2g} + h_r \quad (2.1)$$

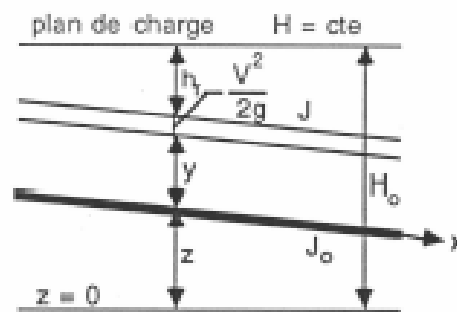


Figure 2.1 : Profil en long d'un écoulement uniforme

En dérivant par rapport à x pour isoler les paramètres variables on obtient :

$$\frac{dH_0}{dx} = 0 = \frac{dz}{dx} + \frac{dh_r}{dx}$$

Ou encore

$$J = J_0$$

qui est l'équation des écoulements uniformes, où J_0 est la pente du lit. Nous remarquons par ailleurs que :

- la ligne d'eau (qui est aussi la ligne piézométrique - sur le lit $p = \gamma y$, en surface $p = 0$), la ligne de charge et la ligne du fond - sur le lit - ($v^2/2g$ et $y = \text{ctes}$) sont parallèles ;

–la perte de charge cumulée - qui croît selon x - est exactement compensée par la perte d'altitude du lit - qui diminue.

Pour évaluer J nous pouvons appliquer une loi de comportement. Le choix le plus répandu est celui de la loi de Manning-Strickler, qui permet d'écrire, après substitution de J par J_0 et multiplication par la section S de l'écoulement

$$Q = KSR^{2/3}J_0^{1/2} \quad (2.4)$$

forme la plus couramment utilisée dans la pratique des écoulements en nappe libre.

Si nous séparons les termes de l'équation (2.4) ainsi :

$$SR^{2/3} = \frac{Q}{KJ_0^{1/2}} \quad (2.5)$$

il apparaît que le diviseur à droite est une constante pour tout lit donné et les termes à gauche du signe égal sont fonction de la profondeur de l'écoulement uniquement. Il existe donc une relation directe débit-profondeur qui devient bi-univoque lorsque $S(y)$ et $R(y)$ sont des fonctions monotones croissantes de y . Ainsi la profondeur qui s'établit naturellement dans un lit prismatique pour chaque débit est appelée profondeur normale y_0 ou y_n . La réciproque est bien entendu aussi vraie. La courbe

$$Q = f(y_0) \quad (2.6)$$

est appelée courbe des profondeurs normales et définit la relation débit-profondeur d'eau pour un lit donné en écoulement uniforme. Il devient ainsi possible de déterminer le débit en mesurant la profondeur d'écoulement. Cette idée a été largement utilisée en hydraulique et en hydrométrie et ceci bien au-delà du cadre défini ci-dessus (stations hydrométriques, déversoirs, débitmètres divers, etc.)

Comme déjà dit, les coefficients de rugosité, déterminés par voie expérimentale ou évalués par analogie, sont tabulés dans les aide-mémoire sous forme de fourchettes accompagnées de descriptifs des lits correspondants, ou parfois même de photos. Le choix d'un coefficient de Manning « n » ou de Strickler « K » reste dans ces conditions un choix au jugé. La proposition de Strickler-Müller de lier K à la granulométrie des lits d'alluvions (D_{50} , D_{90}) et à la rugosité de sable équivalente de Nikuradze, n'a pas vraiment fait avancer les choses, malgré l'introduction d'un critère apparemment objectif.

Les lits naturels, comme les canaux vitrés de laboratoire, sont souvent constitués de zones de rugosité différentes, quoique pour les premiers la séparation est moins précise. Des propositions ont été faites pour le calcul d'un K pondéré, incluant, le cas échéant, les écarts entre lit réel et lit prismatique (variations de la forme des sections, coudes). Cela n'est pas toujours très pratique dans les applications, par manque

d'information et parce que les coefficients de rugosité varient effectivement dans ces conditions avec les débits/niveaux et d'un tronçon à l'autre.

Un cas particulier des écoulements en nappe libre est celui des canalisations d'égout où, théoriquement au moins, les conditions d'un écoulement uniforme sont réunies sur les collecteurs principaux et partiellement sur d'autres. Il s'agit toutefois de sections fermées pour lesquelles la relation $Q = f(y_0)$ n'est pas bi-univoque : pour un tuyau circulaire le même débit peut être transporté à $Y_0 = D$ et à $Y_0 \geq 0,83D$! La détermination du degré de remplissage est faite habituellement au moyen de graphiques ou tables dont les entrées sont $y=y_p$ et $Q=Q_p$ (p =plein).

Écoulements non-uniformes : énergie et force d'un écoulement

Nous avons mis l'accent jusqu'ici sur les analogies entre écoulements en charge et en nappe libre. Le bon sens et l'observation montrent qu'il y a aussi des différences et notamment que, même dans les lits prismatiques, *un écoulement/débit peut se produire, dans les mêmes conditions de charge, à 2 profondeurs différentes* (canaux à pentes différentes, à l'amont et à l'aval d'une vanne ou d'un déversoir). Lorsque ces 2 profondeurs sont en présence dans le même canal, *le passage de l'une à l'autre se fera soit par saut à travers un organe de contrôle, soit spontanément, en écoulement non-contrôlé, par un ressaut hydraulique, phénomène violent et spectaculaire, ou encore graduellement*. L'étude de ces particularités des écoulements en nappe libre peut être faite dans le cadre déjà connu des *équations de l'énergie et de la quantité de mouvement*.

Energie d'un écoulement

Si nous groupons les expressions de l'énergie totale disponible en toute section d'un écoulement (2.7) et celle de la continuité (2.8) en une seule équation

$$H = z + y + \frac{V^2}{2g} \quad (2.7)$$

$$Q = VS \quad (2.8)$$

nous obtenons

$$H - z = y + \frac{Q^2}{2gS^2} \quad (2.9)$$

Le terme de droite est l'énergie propre de l'écoulement, désignée le plus souvent comme *énergie par rapport au pied de la section et/ou énergie spécifique* et notée par H_s .

Avec cette dernière notation et $Q = cte$, ce qui correspond au cas le plus courant d'un écoulement sans apport ou prélèvement, nous écrirons :

$$H_s = y + \frac{Q^2}{2gS^2} \quad (2.10)$$

où H_s est une fonction de la profondeur "y" exclusivement - $H_s = H_s(y)$. La représentation graphique de cette fonction est donnée à la figure 2.2. En effet :

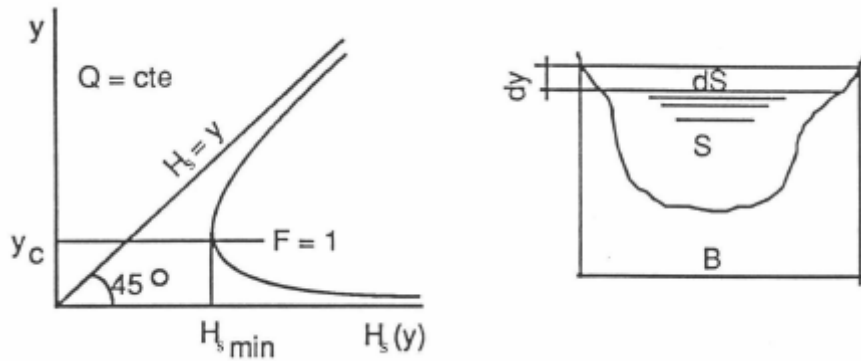


Fig. 2.2 – La fonction H_s -y ou courbe d'égal débit

$$\begin{aligned} y \rightarrow \infty & \quad \frac{Q^2}{2gS^2} \rightarrow 0 & \quad \text{et} & \quad H_s \rightarrow y \\ y \rightarrow 0 & \quad \frac{Q^2}{2gS^2} \rightarrow \infty & \quad \text{et} & \quad H_s \rightarrow \infty \end{aligned}$$

D'autre part

$$\frac{dH_s}{dy} = 1 + \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dy} (S^{-2}) = 1 - \frac{Q^2}{gS^3} \frac{dS}{dy} \quad (2.11)$$

et avec $B dy = dS$ le terme tout à droite devient

$$\frac{Q^2 B}{gS^3} = \frac{V^2}{gS/B} = F^2 \quad (2.12)$$

où B est la largeur au miroir et F^2 le *nombre de Froude* au carré. Ce nombre adimensionnel exprime le rapport des forces d'inertie et de pesanteur ainsi que le double du rapport des énergies cinétique et potentielle. L'équation (2.12) peut donc s'écrire :

$$\frac{dH_s}{dy} = 1 - F^2 \quad (2.13)$$

et l'extremum de la fonction $H_s(y)$ correspond à la condition

$$F^2 = 1$$

En dérivant une seconde fois, on peut montrer que cet extremum est un minimum. H_{smin} correspondant à la *profondeur critique*, y_c .

Ces résultats appellent les commentaires suivants :

- la courbe H_s j y est une courbe à 2 bras, qui confirme les observations montrant que pour une même condition de charge et débit il y a 2 géométries d'écoulement (y) possibles, le cas critique excepté ;
- sur la *branche inférieure* de la courbe (Figure 2.3), $y < y_c$ et $F^2 > 1$, l'écoulement est rapide (V grand), soit *torrentiel* ou *supercritique* ;
- sur la *branche supérieure*, $y > y_c$ et $F^2 < 1$, l'écoulement est lent (V faible) et désigné comme *fluvial*, *tranquille* ou *sous-critique* ;
- $F^2 = 1$ signifie que la seule force active présente dans l'écoulement à $y = y_c$ est la pesanteur.

Comme le frottement ne peut pas être supprimé physiquement, il apparaît que l'écoulement critique ne peut pas être naturellement stable. Le passage par la profondeur critique sera forcément une situation transitoire, localisée dans une section ou un tronçon court ;

- pour tout débit Q , il existe une énergie minimum nécessaire pour assurer l'écoulement. Le principe du travail minimum de Gauss, énoncé déjà par Léonard sous la forme "la nature choisit la voie la plus courte", rend le passage par H_{smin} vraisemblable chaque fois qu'une adaptation spontanée à une modification importante des conditions d'écoulement est imposée.

Le cas des sections rectangulaires est fréquent dans les ouvrages et mérite d'être présenté pour lui-même. Ainsi, avec $Q = qB$, q étant le débit par unité de largeur, nous aurons :

$$H_s = y + \frac{q^2}{2gy^2} \quad (2.14)$$

$$F^2 = \frac{V^2}{gy} \quad \text{et pour} \quad F^2 = 1, \quad V_c = \sqrt{gy_c} \quad \text{soit avec} \quad q = Vy$$

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (2.15)$$

et

$$H_{smin} = 1.5 y_c \quad (2.16)$$

La relation simple entre le débit et la profondeur critique est à l'origine de toute la débitmétrie à profondeur critique.

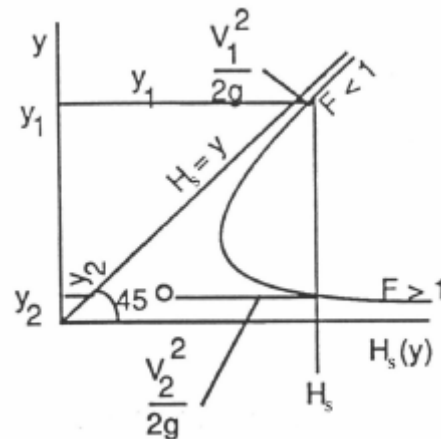


Fig. 2.3 – Propriétés de la courbe H_s - y

Les équations précédentes ont des applications à première vue surprenantes. En effet, nous pouvons observer que la surface d'un écoulement à faible vitesse ou celle de l'eau stagnante, est facilement marquée par des perturbations (ondes), qui peuvent y voyager en tous sens : ronds dans l'eau, vagues des bateaux, houles. Le cas le plus courant est celui des ondes de faible amplitude (par rapport à la profondeur) qui se propagent à une célérité c que l'on peut calculer :

$$c = \sqrt{gy}$$

$$\text{or pour } y = y_c \quad V = \sqrt{gy} \quad c = V$$

$$\text{d'où, avec } F^2 > 1 \quad \text{soit } y < y_c \quad V > \sqrt{gy} \quad c < V$$

$$\text{et } F^2 < 1 \quad \text{soit } y > y_c \quad V < \sqrt{gy} \quad c > V \quad (2.17)$$

Ce qui montre que *les ondes de faible amplitude ne peuvent pas se propager vers l'amont (à contre courant) dans un écoulement torrentiel ou critique*, alors que tel n'est pas le cas pour *les écoulements tranquilles qui sentent (reçoivent les signaux arrivant de) l'aval*. Cette propriété des écoulements nous conduit aux 2 conclusions suivantes :

– la profondeur critique est une barrière physique contre toute information arrivant de l'aval. Ce qui revient à dire qu'en amont de y_c on peut ignorer l'aval ! La section où $y = y_c$ est de ce fait une section de contrôle ;

– on peut identifier le type d'écoulement en présence par l'observation du sens de propagation des ondes de surface produites par le jet d'une pierre, ou l'agitation d'une tige dans l'eau.

Nous pouvons reprendre l'analyse de l'équation de l'énergie en faisant varier le débit Q alors que $H_s = Cte$, cas des apports ou prélèvements de débit précisément. En séparant les variables nous aurons :

$$Q = S\sqrt{2g}\sqrt{H_s - y} \quad (2.18)$$

équation représentée graphiquement à la figure 2.4.

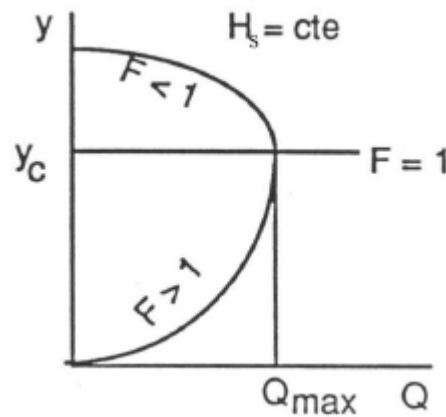


Fig. 2.4 – Fonction Q - y ou courbe d'égale charge

La forme de la fonction Q ; y peut être obtenue comme suit :

$$y = 0 (S = 0) \quad \text{et} \quad y = H_s (V = 0) \quad \rightarrow \quad Q = 0$$

$$\frac{dQ}{dy} = [2g(H_s - y) \frac{dS}{dy} - Sg][2g(H_s - y)]^{-1/2} \quad (2.19)$$

et $dQ/dy = 0$ lorsque $2(H_s - y)B = S$ Avec $H_s - y = Q^2/2gS^2$ la condition devient $F^2 = 1$

Ce résultat n'est que le réciproque du précédent. En effet, s'il faut une charge minimum pour rendre possible le passage d'un débit donné, il est évident que ce débit sera précisément le débit maximum possible pour la charge respective.

Les analyses précédentes nous permettent de prévoir, au moyen des fonctions $H_s = H_s(y)$ et $Q = Q(y)$, le comportement d'un écoulement à débit constant lorsque sa charge est modifiée (seuils, chutes) ou encore d'un écoulement à charge constante lorsque nous pratiquons un prélèvement ou une adduction de débit (pompages, rejets, jonctions/embranchements, confluences) et ceci quel que soit le type d'écoulement. Ce dernier peut être déterminé en calculant le nombre de Froude (F^2) correspondant.

Force de l'écoulement

Considérons le cas de la figure 2.5 et écrivons l'équation de quantité de mouvement projetée sur l'axe Ox qui lui correspond :

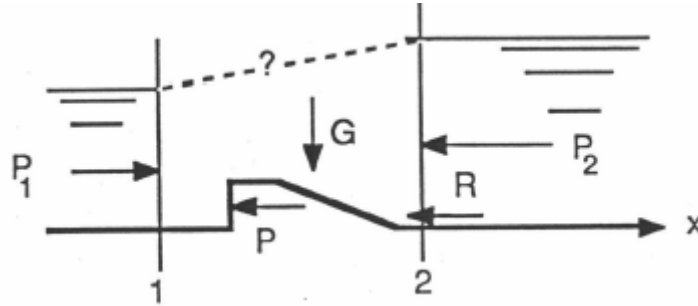


Fig. 2.5 – Equilibre des forces dans un écoulement

$$P_1 - P_2 - P - R + G_x = \rho Q(V_2 - V_1) \quad (2.20)$$

Si les sections 1 et 2 peuvent être choisies de telle manière qu'elles soient assez proches pour que $R \sim 0$ (frottement sur parois négligeable) tout en s'assurant que la répartition des pressions y soit au moins approximativement hydrostatique, si la pente du lit est assez faible pour que $G_x \sim 0$ et si le lit est prismatique (sinon P doit inclure la composante dans le sens de l'écoulement de la réaction des parois latérales), nous pourrons écrire après substitutions :

$$(\gamma z_{G1} S_1 + \rho Q V_1) - (\gamma z_{G2} S_2 + \rho Q V_2) = P \quad (2.21)$$

ou encore

$$\rho g \left[(z_{G1} S_1 + \frac{Q^2}{g S_1}) - (z_{G2} S_2 + \frac{Q^2}{g S_2}) \right] = P \quad (2.22)$$

Le terme $M = z_G S + Q^2/gS$ est appelé *force de l'écoulement*.

En l'absence de l'obstacle $P = 0$, l'équation 2.22 devient :

$$M_1 = M_2 \quad (2.23)$$

Cette dernière équation exprime la conservation de la force de l'écoulement. La représentation graphique de la fonction $M(y)$ pour $Q = \text{cte}$, révèle ici encore une courbe à 2 branches - Figure 2.6.

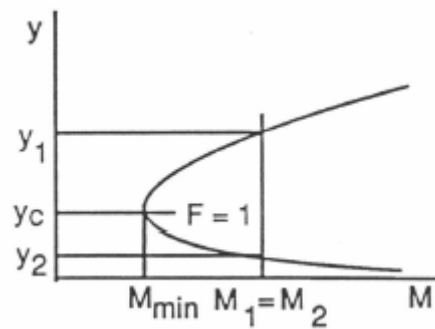


Fig. 2.6 – Fonction M - y ou de la force de l'écoulement

L'allure de la courbe et son extremum sont trouvés de la même façon que pour son correspondant $H_s(y)$ et la condition $F^2 = 1$ pour $y=y_c$ est confirmée. Les 2 solutions possibles de la fonction $M(y)$, y_1 et y_2 sont appelées *profondeurs conjuguées*.

Par unité de largeur nous aurons :

$$M = \frac{y^2}{2} + \frac{q^2}{gy} \quad (2.24)$$

et

$$M_{min} = 1.5y_c^2 \quad (2.25)$$

La superposition des graphiques des figures 2.2 et 2.6 produit la figure 2.7.

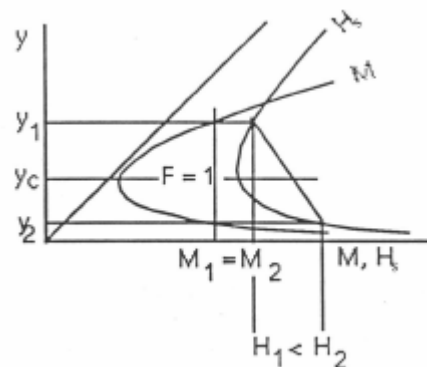


Fig. 2.7 – Courbes $H_s = H_s(y)$ et $M = M(y)$ superposées

L'examen de cette figure fait ressortir que les conditions de conservation de l'énergie et de la force sont incompatibles, à la seule exception du cas de la profondeur critique où les 2 profondeurs sont confondues. Par ailleurs, l'utilisation des 2 équations dans le sens impliquant la conservation de la charge et de la force le long des écoulements n'est pas rigoureusement correcte à cause des frottements internes et à la paroi. A défaut de disposer de lois de comportement

ad-hoc (c'est aussi le cas pour la plupart des singularités dans les écoulements en charge), nous sommes amenés à les ignorer. Cela situe alors les équations citées dans le domaine des hypothèses (modèles) de calcul et les solutions ainsi obtenues dans le cadre d'évaluations plus ou moins précises, selon les cas.

Formes non-dimensionnelles de $H_s(y)$ et $M(y)$

Il est à la fois usuel et avantageux, pour des raisons de simplicité, de clarté et mnémotechniques, de mettre les expressions de H_s et M sous forme adimensionnelle. Ainsi, pour le cas de sections rectangulaires ou assimilables, nous pouvons "normaliser" les équations par y , y^2 ou encore y_c , y_c^2 pour obtenir :

$$\frac{H_s}{y} = 1 + \frac{1}{2}F^2 \quad (2.26)$$

$$\frac{M}{y^2} = \frac{1}{2} + F^2 \quad (2.27)$$

$$\frac{H_s}{y_c} = H_{s*} \quad \frac{M}{y_c^2} = M_* \quad \text{et} \quad \frac{y}{y_c} = y_*$$

$$H_{s*} = y_* + \frac{1}{2}y_*^{-2} \quad (2.28)$$

$$M_* = y_*^{-1} + \frac{1}{2}y_*^2 \quad (2.29)$$

Remarques finales

A la fin de cette analyse il est intéressant de *conclure sur la dissemblance entre écoulements en charge et en nappe libre*. Il apparaît de ce qui précède que *le degré de liberté supplémentaire* des derniers, dont il est fait état en début de chapitre, *se traduit dans notre incapacité de prévoir de manière univoque les comportements des écoulements non-uniformes* sans la connaissance préalable du nombre de Froude. Les équations de continuité, d'énergie et/ou de quantité de mouvement ne suffisent qu'à nous indiquer l'existence d'une paire de solutions physiquement possibles. Le couplage avec une loi de comportement, pour autant qu'elle soit déterminée, ne pourra évidemment pas lever l'incertitude quant à la solution quantitativement correcte. Ce chapitre apporte dès lors la démonstration analytique que *pour effectuer le "bon choix" il nous faudra toujours une information supplémentaire* qui fournit des indications sur sa forme éventuelle : position et valeur de y_c , valeur de F^2 , profondeur normale.

Dans la nature ce problème est bien entendu résolu par le transfert "hydraulique" des informations vers l'amont et/ou l'aval, entre sections de contrôle.

Écoulements variés

A ce point, nous avons passé en revue tous les outils que l'hydraulique classique met à notre disposition pour résoudre les problèmes des écoulements non-uniformes dont celui des écoulements variés. Nous commencerons par examiner le cas le plus simple.

Le ressaut hydraulique

Rappelons qu'il s'agit d'un *phénomène naturel*, illustré aux figures 2.8 et 2.9, se produisant lors du *passage d'un écoulement à énergie cinétique élevée* ($F^2 > 1$) à un *écoulement à énergie potentielle dominante* ($F^2 < 1$). Ce passage, analogue à celui pouvant se produire lors d'une augmentation brusque de la section d'écoulement en écoulement en charge, s'accompagne, d'une dissipation importante d'énergie mécanique dans des *tourbillons* plus ou moins *violents* au point qu'ici, on peut observer l'éjection de véritables "paquets" d'eau, à l'origine d'une plus ou moins forte *absorption d'air*. Fondamentalement, il s'agit d'une décélération brutale des écoulements.

Si nous acceptons les hypothèses formulées ci-dessus, la description analytique du phénomène revient à :

$$F_1^2 > 1 \rightarrow F_2^2 < 1$$

$$H_1 = H_2 + h_{sR} \quad (2.30)$$

$$\text{et } M_1 = M_2 \quad (2.31)$$

avec h_{sR} la perte de charge (singulière) du ressaut. Après substitution et arrangements, nous obtenons pour le cas plan (le ressaut est généralement confiné dans des ouvrages en béton pour éviter l'érosion du lit) :

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2} [\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1] \quad (2.32)$$

$$\frac{h_{sR}}{y_1} = \frac{\left(\frac{y_2}{y_1} - 1\right)^3}{4\frac{y_2}{y_1}} \quad (2.33)$$

Il faut remarquer que nous ne disposons que de 2 équations pour 3 inconnues (y_1 ; y_2 ; h_{SR}) alors que la longueur L_R du ressaut n'y figure même pas (conséquence de notre méconnaissance des lois de comportement concernant les frottements internes, dans les tourbillons et sur le fond). Nous devons dès lors fournir une information supplémentaire et déterminer L_R soit par voie expérimentale, ce qui a été fait, soit nous engager dans la détermination de la loi de comportement respective. Le ressaut est un des phénomènes les plus étudiés en hydraulique parce que largement utilisé par les ingénieurs en tant que dissipateur d'énergie, pour l'entraînement de l'air (oxygénation des écoulements), comme mélangeur (à l'interface de 2 liquides différents) ou encore comme débitmètre. Pour des évaluations rapides on utilisera :

$$\frac{y_2}{y_1} = \sqrt{2F_1^2 - 0.5} \quad \text{si } F_1 \geq 1 \quad (2.34)$$

$$\frac{L_R}{y_2} = 6 \quad \text{si } F_1 > 5 \quad \text{et} \quad (2.35)$$

$$q = \sqrt{g} \sqrt{\frac{y_1 + y_2}{2}} \sqrt{y_1 y_2} \quad (2.36)$$

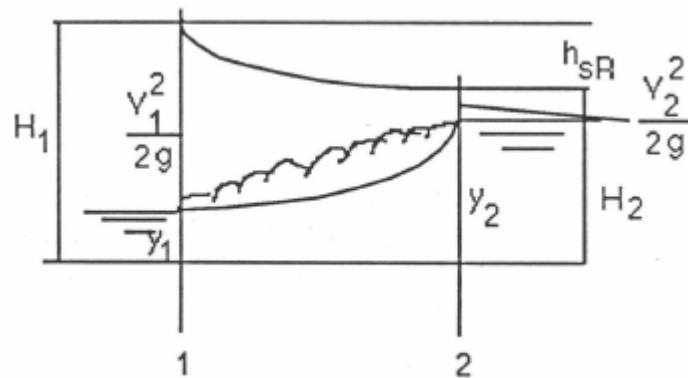


Fig. 2.8 – Schématisation du ressaut hydraulique



Fig. 2.9 – Illustration d'un ressaut hydraulique

S'ajoute à ceci une classification des ressauts selon leur aspect et leur capacité de dissiper de l'énergie:

- $F_1 < 1.7$ ou $y_2 = y_1 < 2$: ressaut ondulé, sans tourbillons de surface
- $1.7 < F_1 < 2.5$: pré-ressaut, faibles tourbillons, $h_{SR} < 0.2H_1$

- $2.5 < F_1 < 4.5$: ressaut de transition instable, se détachant et se réattachant au fond (produit des vagues sur longues distances), $0.2 < h_{sR} < 0.70H_1$
- $4.5 < F_1 < 9.0$: ressaut stable (peu sensible aux variations de la profondeur aval), $0.45 < h_{sR} < 0.70H_1$
- $F_1 > 9.0$: ressaut rugueux, la zone tourbillonnaire dépasse la longueur effective du ressaut, h_{sR} jusqu'à $0.85H_1$

Pour ce qui est de la capacité d'absorption d'air du ressaut, les données expérimentales disponibles permettent de proposer la relation suivante :

$$\beta_{an} = K(F_1 - 1)^{1.4} \quad \text{avec} \quad 0.0066 < K < 0.015 \quad (2.37)$$

$$\beta_{an} = \frac{q_n \text{ air}}{q_{eau}} \quad (2.38)$$

n signifiant débit net entraîné.

Variations de la géométrie du lit

Les cas courants de la pratique de l'ingénieur sont *les seuils et les chutes, les changements de largeur* (souvent imposées par les ouvrages mais aussi par les gorges naturelles), *les ruptures de pente et les coudes*. La présence de ces *singularités* marquera de manière visible la *ligne d'eau*, la forme spécifique de cette dernière dépendant de la géométrie de la singularité et du F^2 de(s) l'écoulement(s) en présence.

La description analytique correspondante est simple surtout parce que les pertes de charge, souvent faibles, sont ignorées.

Ainsi, avec les sections 1 et 2 de part et d'autre de l'obstacle respectivement :

Seuils : $F^2 < 1$; $H_{s2} = H_{s1} - y_s$ (y_s = hauteur du seuil) et $M_2 = M_1 - Rs$ (Rs = réaction du seuil sur l'écoulement). Si $H_{s1} - y_s > H_{smin}$, la ligne d'eau s'abaissera sur le seuil et $y_2 = y_c$. Dans le cas contraire, $H_{s2} < H_{smin}$ est physiquement impossible. L'écoulement en amont du seuil s'exhaussera, accumulant ainsi l'énergie qui lui fait défaut pour passer le seuil, jusqu'au niveau où $H_{s1} = H_{smin} + y_s$ correspondant à $H_{s2} = H_{smin}$ et à une profondeur d'eau sur le seuil $y_2 = y_c$. La nouvelle profondeur y_1 sera déterminée à partir de la nouvelle valeur de H_{s1} .

$F^2 > 1$, symétriquement, mais pas de la même valeur, la ligne d'eau remontera sur le seuil si $H_{s1} - y_s \geq H_{smin}$. Dans le cas contraire l'accumulation de l'énergie exigée par l'obstacle ne peut pas avoir lieu en écoulement torrentiel, sans accélération des écoulements. Ceci est physiquement impossible en l'absence d'un "moteur". La seule autre

solution est le passage en écoulement tranquille, ce qui implique le ressaut hydraulique et une dissipation d'énergie préalable à l'accumulation imposée.

Chutes : Le raisonnement est analogue et les solutions symétriques, sauf que bien évidemment il n'y a aucun problème d'accumulation d'énergie en amont de la chute.

Étranglements : La différence par rapport aux seuils est que nous aurons une fonction $H_s(y)$ pour chacune des 2 largeurs en présence. En effet, y_c est fonction de q et pour le même Q le premier changera avec la largeur ($y_{cB} < y_{cb}$ si $B > b$). Le passage se fait de $y_B > y_b$ ou $y_B < y_b$ selon que $F^2 < 1$ ou $F^2 > 1$. Si toutefois $H_{sB} < H_{sbmin}$, la charge amont est insuffisante pour passer l'obstacle et il y aura, selon le cas, exhaussement ou ressaut suivi d'exhaussement en amont et passage en y_c sur la longueur (courte !) de l'étranglement. Si le changement de largeur est graduel et $F^2 > 1$ nous pouvons observer l'apparition d'ondes stationnaires traversant l'écoulement (ce dernier "ricoché" sur les parois). Leurs hauteur et position peuvent être calculées à l'aide de l'équation de quantité de mouvement.

Élargissements : les choses se passent symétriquement mais sans le problème de l'exhaussement imposé. Étranglements et élargissements sont presque toujours associés, se succédant à plus ou moins courte distance : ponts, passages sous voies, travaux en rivières (batardeaux).

Ruptures de pente : Elles s'accompagnent soit d'une accélération soit d'une décélération des écoulements, avec ou sans passage par H_{smin} . En accélération ($J_{01} < J_{02}$) la ligne d'eau s'abaisse avec, le cas échéant, passage par y_c sur le point de rupture. En décélération ($J_{01} > J_{02}$) il y a exhaussement mais, comme le passage par y_c n'est pas possible si $F_1^2 > 1$, c'est un ressaut qui le précédera, son emplacement, en amont ou en aval de la rupture, étant déterminé par les conditions qui lui sont propres et celles régnant en aval précisément.

Coudes : La particularité des écoulements dans les coudes consiste dans l'apparition de forces centrifuges qui modifient la position de la surface libre et génèrent un mouvement général hélicoïdal, vital pour la stérilisation des écoulements par exposition au rayonnement ultraviolet et pour l'homogénéisation des températures mais qui aura aussi pour effet, en lit alluvionnaire, d'approfondir la rive extérieure et de former des dépôts sur la rive intérieure (dans le sens de l'écoulement). Dans les écoulements torrentiels apparaîtront les ondes stationnaires déjà mentionnées (ici courbées) dues au changement de direction (ici continu et dissymétrique) de la paroi.

Écoulements graduellement variés

Nous dirons qu'un écoulement est graduellement varié lorsque ses caractéristiques changent modérément entre sections voisines et rapprochées. Nous admettrons aussi que dans ces conditions la courbure des filets liquides est faible et, de ce fait, que la répartition des pressions reste hydrostatique. D'autre part, l'observation montre que cette définition décrit bien les écoulements de transition entre la condition d'écoulement uniforme et les conditions locales imposées selon le cas par les variations de géométrie ("singularités"). Il se trouve en outre que ce modèle peut aussi convenir aux écoulements en rivières à lit régulier. Si la définition adoptée ouvre la voie à l'utilisation du calcul différentiel et intégral, ce qui est un avantage indiscutable, il reste néanmoins que les concepts "modéré", "voisin", "rapproché", sont à évaluer au jugé. La qualité des solutions obtenues dépendra, de ce fait même, de l'adéquation et du mode d'application du modèle au problème à résoudre.

Lits prismatiques

L'étude de la variation des paramètres de l'écoulement le long de celui-ci sera évidemment plus facile dans un lit prismatique, dont la géométrie peut éventuellement être décrite analytiquement. La variation de la charge H sur dx est exprimée par sa dérivée :

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{S^2} \right) \quad (2.39)$$

La loi des pertes de charge dans les écoulements graduellement variés n'est pas connue mais nous pouvons admettre que la dérivée locale de la charge est égale à la pente moyenne de la ligne de charge sur dx (égale aussi mais de signe opposé à la perte de charge unitaire moyenne sur dx). D'autre part, en dérivant le terme entre parenthèses nous obtenons :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{S^2} \right) = -\frac{2}{S^3} \frac{dS}{dx} \quad (2.40)$$

avec

$$\frac{dS}{dx} = \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (2.41)$$

Or, d'une part $\delta S / \delta y = B$ et d'autre part, en lit prismatique $\delta S / \delta x = 0$. Cela nous amène, après substitutions et regroupements à :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{J_0 - J}{1 - F^2} \quad (2.42)$$

Pour parvenir à une solution directe de cette équation il faudra procéder à plusieurs manipulations et simplifications complémentaires, soit

- une "normalisation" par rapport à l'écoulement uniforme,
- admettre la validité de la loi de Manning-Strickler,
- admettre un coefficient de rugosité invariable ($\delta K/\delta y = \delta K/\delta x = 0$).

Cela donnera, après substitutions, l'équation différentielle de la ligne d'eau où apparaissent les paramètres de l'écoulement uniforme :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \phi_2}{1 - \phi_1 F_0^2} \quad (2.43)$$

avec les notations :

$$\phi_2 = \left(\frac{S_0 R_0^{2/3}}{S R^{2/3}} \right)^2$$

$$\phi_1 = \frac{B}{B_0} \left(\frac{S_0}{S} \right)^3$$

avec Φ_1 et Φ_2 fonctions de la profondeur seulement pour tout lit donné. Si les fonctions Φ_1 et Φ_2 sont des fonctions simples de la profondeur, une *intégration directe* est envisageable, sinon, seule une *intégration par différences finies* peut être envisagée généralement pour obtenir la ligne d'eau. La fraction dans le terme de droite de l'équation 2.43 peut être notée :

$$\frac{1 - \phi_2}{1 - \phi_1 F_0^2} = f^{-1}(y) \quad (2.44)$$

ou, plus simplement, f^l . Dès lors

$$\frac{dy}{dx} = J_0 f^{-1} \quad (2.45)$$

et, en séparant les variables :

$$J_0 dx = f dy \quad (2.46)$$

Après intégration par parties entre les sections 1 et 2, nous obtenons :

$$J_0(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)(y_2 - y_1) \quad (2.47)$$

où f_1 ; $f_2 = f(y_1)$ et $f(y_2)$ respectivement.

Pour résoudre cette équation avec 4 inconnues, il faudra en déterminer 3. La voie usuelle consiste à choisir une section de départ

du calcul où nous connaissons la profondeur (station limnigraphique, y_c , singularité) - le couple $x_1; y_1$ est ainsi "accroché" - et de sélectionner un y_2 proche de y_1 . Nous pourrions alors calculer le x_2 correspondant et ainsi de suite par couples de sections. La forme généralisée de l'équation précédente devient :

$$\bar{f}\Delta y = J_0\Delta x \quad (2.48)$$

Le "f" barré étant la moyenne des "f" des 2 sections distantes de Δx ; Δy le pas (d'intégration) et Δx la distance au profil de référence. D'autres manières d'intégration sont bien entendu envisageables selon les données à disposition.

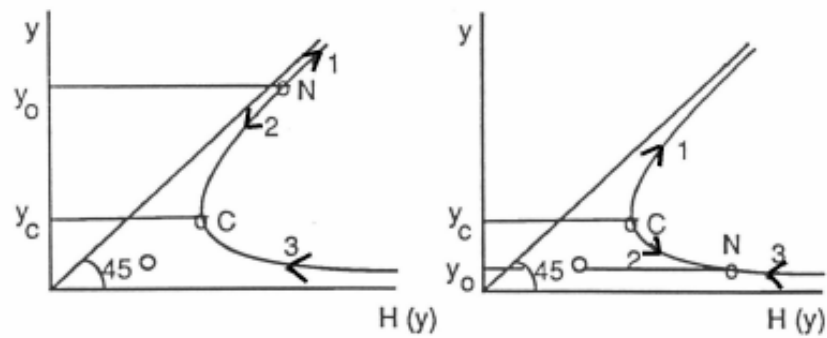
La forme particulière de la ligne d'eau pour un débit donné, appelée aussi *courbe de remous*, sera déterminée, comme nous l'avons déjà dit, par la géométrie du lit et le régime d'écoulement, ramenés ici à f et J_0 . Considérant le cas le plus fréquent d'une pente dans le sens de l'écoulement, soit par convention $J_0 > 0$, nous devons de plus distinguer les situations $F_0^2 < 1$ (écoulements en *rivière*) et $F_0^2 > 1$ (écoulements en *torrent*). Nous pouvons dès lors revenir à la forme :

$$\frac{dy}{dx} = J_0 \frac{1 - \phi_2}{1 - F^2} \quad (2.49)$$

qui ne contient plus F_0^2 (après avoir précisé ci-dessus le rôle de J_0 : rivière, torrent). D'autre part $dy / dx > 0$ signifie une décélération de l'écoulement, soit un exhaussement de la ligne d'eau et réciproquement $dy / dx < 0$ une accélération soit un abaissement de cette dernière. Or, la forme de l'équation indique que l'écoulement sera accéléré ou décéléré selon que Φ_2 et F^2 sont supérieurs, égaux ou inférieurs à 1.

L'analyse des situations physiquement possibles est résumée à la figure 2.10. Pour préciser encore les formes des courbes de remous nous pouvons remarquer que :

- $F = 1$ ($y = y_c$) entraîne $dy / dx \rightarrow \infty$
- $\Phi_2 \rightarrow 1$ signifie $dy / dx \rightarrow 0$ soit $y = y_0$ (= cte)
- $\Phi_2 \rightarrow 0$ signifie $y \rightarrow \infty$ et $F \rightarrow 0$ d'où $dy / dx = J_0 = -dz / dx$ soit encore $dy = -dz$ correspondant à une ligne d'eau horizontale.

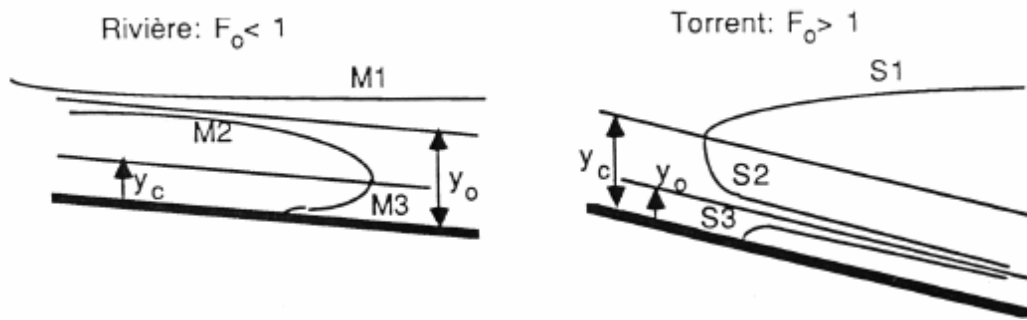


$F_0 < 1$		$F_0 > 1$	
$\frac{dy}{dx} > 0$			
Conditions	Flèches Désignation	Conditions	Flèches Désignation
$\phi_2 < 1$ $F < 1$	1 M1	$\phi_2 < 1$ $F < 1$	1 S1
$\phi_2 > 1$ $F > 1$	3 M3	$\phi_2 > 1$ $F > 1$	3 S3
$\frac{dy}{dx} < 0$			
$\phi_2 > 1$ $F < 1$	2 M2	$\phi_2 > 1$ $F < 1$	impossible
$\phi_2 < 1$ $F > 1$	impossible	$\phi_2 < 1$ $F > 1$	2 S2

Règle des flèches : Les flèches indiquant les écoulements physiquement possibles s'éloignent du point supérieur et s'approchent du point inférieur.

Fig. 2.10 – Courbes de remous possibles avec $J_0 > 0$, désignations et règle des flèches

Les courbes de remous ainsi définies sont montrées à la figure 2.11.



M1 - exhaussement tranquille

M2 - abaissement tranquille

M3 - exhaussement torrentiel

S1 - exhaussement tranquille

S2 - abaissement torrentiel

S3 - exhaussement torrentiel

Ajouter en rivière ou en torrent

Fig. 2.11 – Courbes de remous en rivière et en torrent avec $J_0 > 0$

Pour obtenir les courbes de remous avec $J_0 = 0$ et $J_0 < 0$ nous reprendrons la même démarche mais avec les conditions correspondantes.

Des exemples de lignes d'eau réelles décrites par les courbes de remous de la figure 2.11 sont :

- M1 ou S1 en amont d'un obstacle important, d'un barrage, etc.
- M2 suivie de S2 sur une rupture de pente, au passage d'un écoulement tranquille en amont à torrentiel à l'aval du point de rupture.
- M3 ou S3 en aval d'une vanne lors d'un passage sous vanne, etc.

Lits naturels

Les *lits des ruisseaux, des rivières et des fleuves* sont souvent assez réguliers sans toutefois être prismatiques ni de rugosité invariable. Les écoulements restent bien graduellement variés et les développements précédents indiquent correctement les tendances. L'intégration directe ou par différences finies des équations correspondantes n'est cependant pas envisageable dans le cas des lits naturels.

Nous reviendrons dès lors à la forme primitive de l'équation de conservation d'énergie écrite entre les sections 1 et 2 :

$$z_1 + y_1 + \frac{Q^2}{2gS_1^2} = z_2 + y_2 + \frac{Q^2}{2gS_2^2} + \Delta H_{1-2} \quad (2.50)$$

Nous admettrons que la perte de charge entre les 2 sections peut être évaluée au moyen de la loi de Manning-Strickler comme suit :

$$\Delta H_{1-2} = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\Delta x \quad (2.51)$$

avec $J = Q^2 / K^2 S^2 R^{4/3}$ la pente de frottement et Δx la longueur du tronçon entre les 2 sections.

J sera calculé pour chacune des sections avec K éventuellement pondéré en fonction de la nature du lit et des berges. Étant donné que dans les lits naturels la cote du fond varie d'un point à l'autre dans le même profil en travers alors que la ligne d'eau est supposée horizontale : $z + y = cte = Z$ altitude de la ligne d'eau dans la section considérée.

Ce qui donnera, après séparation des variables :

$$Z_1 + \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{g\Delta x}{K_1^2 S_1^2 R_1^{4/3}} \right) = Z_2 + \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{g\Delta x}{K_2^2 S_2^2 R_2^{4/3}} \right) \quad (2.52)$$

Étant donné que $K; S; R = f(Z)$, connaissant Z_1 nous pouvons calculer Z_2 par approximations successives, à la précision souhaitée. Le calcul sera poursuivi ensuite le long de l'écoulement dans le sens donné par les informations disponibles (Z, F). Ce type de calcul se prête bien à la programmation et de nombreux programmes ont été élaborés au fil des années. Un des plus complets et des plus connus est le programme HEC-RAS élaboré par le Hydrological Engineering Center du US Army Corps of Engineers.

*

* *

Avec la fin de ce chapitre nous avons achevé l'examen succinct des principaux modèles utilisables dans le calcul du transport de l'eau en écoulements permanents, sur supports fixes. Notre souci a été de mettre l'accent sur les mécanismes physiques communs en jeu, les parentés entre domaines d'application mais aussi les limites des modèles à disposition.