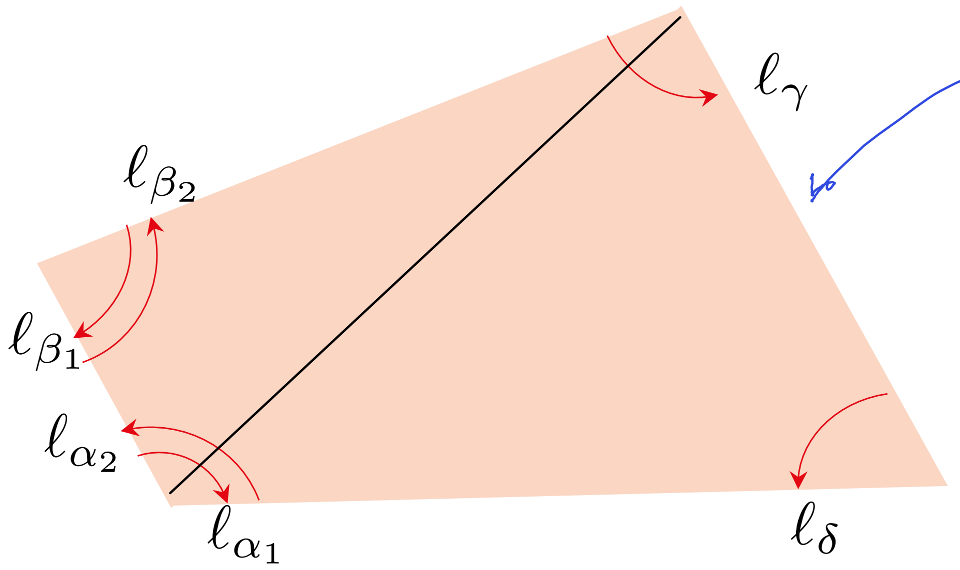
Quadrilateur = 2x △ => 400 jours

Exemple - Quadrilatère



min 3 obs. ! (indépendants !) pour résoudre

min = 3

- Observations

  $\alpha\ 2\times,\ \beta\ 2\times,\ \gamma,\ \delta$ => n = 6

  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$

- Solution(s)
  A. Proposez vous-même (en group de 3 ou 2)
  B. Montrez-le au tableau

Poser le problème

n − min

1. Surdétermination, r = ? 6−3 = 3
2. Choix des conditions, w = ?
3. Modèle stochastique = ?

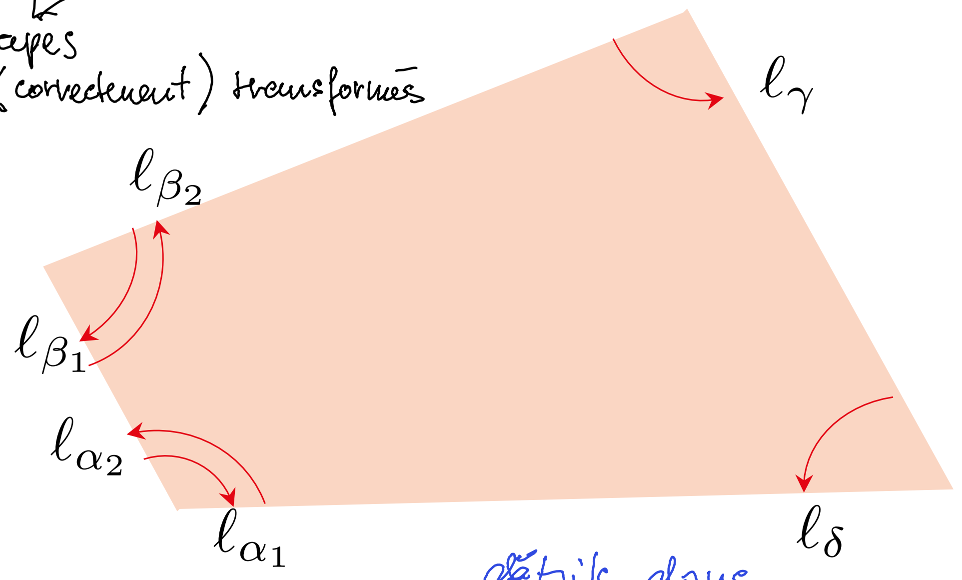
- Indications
  - Quels sont les poids d'α et β bêta par rapport à γ et δ ?

EPFL

Exemple - Quadrilatère

Solution (juste, mais pas optimale)

- 2 étapes
- obs. (correctement) transformées



$\alpha\ 2\times,\ \beta\ 2\times, \gamma, \delta$

$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$

$[\bar\alpha \quad \bar\beta \quad \gamma \quad \delta]$

- Indications
  - Quels sont les poids d'α et β bêta par rapport à γ et δ ?

$\bar\ell_\beta$

$$\bar\ell_\alpha = \frac{1}{2}\ell_{\alpha_1} + \frac{1}{2}\ell_{\alpha_2} = \overbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}}^{F_{\bar\alpha}} \begin{bmatrix}\ell_{\alpha_1} \\ \ell_{\alpha_2}\end{bmatrix}$$

$$\sigma^2_{\bar\ell_\alpha} = F_{\bar\alpha} \underbrace{\begin{bmatrix}\sigma^2_{\alpha_1} & \\ & \sigma^2_{\alpha_2}\end{bmatrix}}_{I\cdot\sigma_\alpha^2} F_{\bar\alpha}^T = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sigma_\alpha^2$$

$$P_{\bar\ell_\alpha} = \frac{1}{\sigma^2_{\bar\ell_\alpha}} = 2P_\alpha$$

$n \to 4 \; ; \; r = 1$

$$\bar\ell_\alpha + \bar\ell_\beta + \ell_\gamma + \ell_\delta - 400^g = 0$$

gon

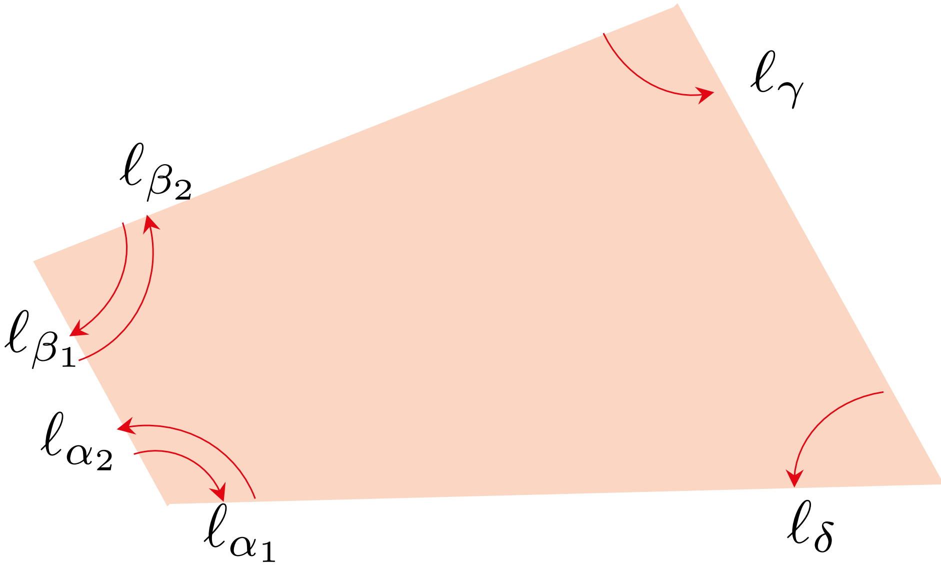
$\to B = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}v_{\bar\alpha} \\ v_{\bar\beta} \\ v_\gamma \\ v_\delta\end{bmatrix}$

$Q_{\ell\ell} = \begin{bmatrix}0.5 & & & \\ & 0.5 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}$ $\ell = \begin{bmatrix}\bar\ell_\alpha \\ \bar\ell_\beta \\ \ell_\gamma \\ \ell_\delta\end{bmatrix}$

note: $400^g = 360° = 2\pi$

- Procédé — détails dans „quadri_condi.py" sur Moodle!
  - exprimer le modèle *fonctionnel*
  - exprimer le modèle *stochastique*

Exemple - Quadrilatère



$\alpha\ 2\times,\ \beta\ 2\times,\ \gamma,\ \delta$

$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$

$\ell^T = [\ \ell_{\alpha_1}\ \ell_{\alpha_2}\ \ell_{\beta_1}\ \ell_{\beta_2}\ \ell_\gamma\ \ell_\delta\ ]$

I. Modèle fonctionnel (option)

$$\check{\ell}_{\alpha_1} + \check{\ell}_{\beta_1} + \check{\ell}_\gamma + \check{\ell}_\delta - 400^g = 0$$

$$\check{\ell}_{\alpha_1} - \check{\ell}_{\alpha_2} = 0$$

$$\check{\ell}_{\beta_1} - \check{\ell}_{\beta_2} = 0$$

- $\mathbf{B}_{I.}$

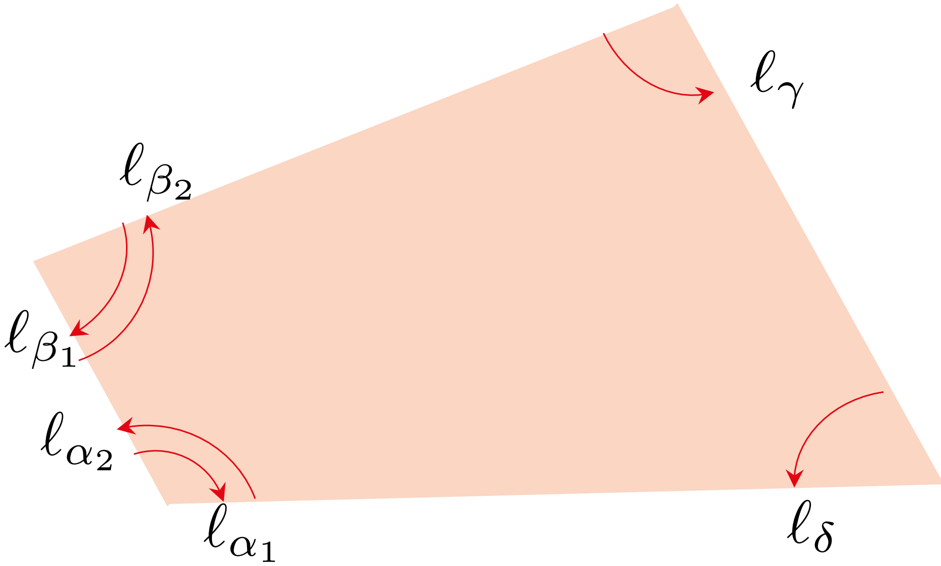
$$B_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\alpha_1} \\ v_{\alpha_2} \\ v_{\beta_1} \\ v_{\beta_2} \\ v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix}$$

Exemple - Quadrilatère

$\alpha\ 2\times,\ \beta\ 2\times,\ \gamma,\ \delta$

$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$

$$\ell^T = [\ell_{\alpha_1}\ \ell_{\alpha_2}\ \ell_{\beta_1}\ \ell_{\beta_2}\ \ell_\gamma\ \ell_\delta]$$



II. Modèle fonctionnel (option)

- $\mathbf{B}_{\mathrm{II.}}$

$$(\ell_{\alpha_1} - v_{\alpha_1}) + (\ell_{\beta_1} - v_{\beta_1}) + (\ell_\gamma - v_\gamma) + (\ell_\delta - v_\delta) - 400^g = 0$$

$$(\ell_{\alpha_1} - v_{\alpha_1}) + (\ell_{\beta_2} - v_{\beta_2}) + (\ell_\gamma - v_\gamma) + (\ell_\delta - v_\delta) - 400^g = 0$$

$$(\ell_{\alpha_2} - v_{\alpha_2}) + (\ell_{\beta_2} - v_{\beta_2}) + (\ell_\gamma - v_\gamma) + (\ell_\delta - v_\delta) - 400^g = 0$$

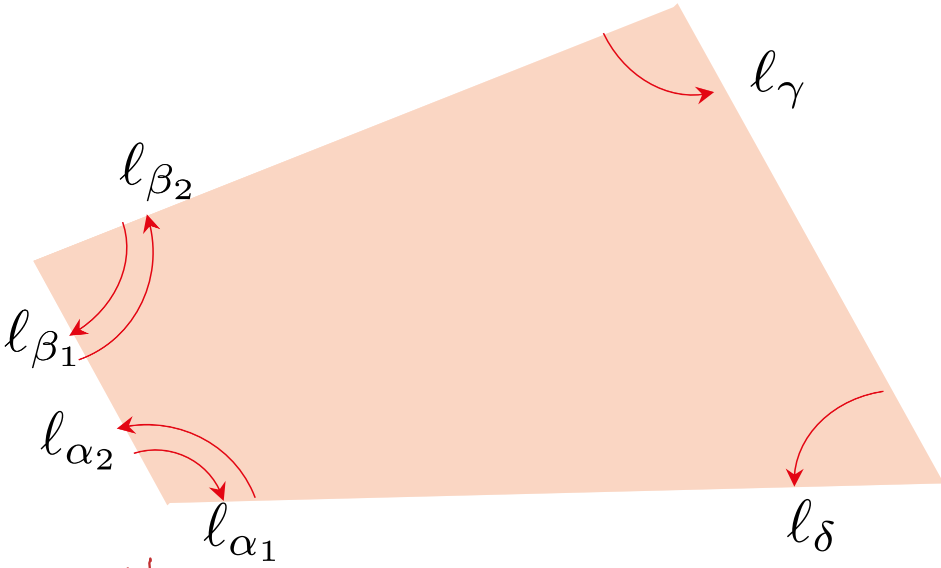
$$B_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_{\alpha_1} \\ v_{\alpha_2} \\ v_{\beta_1} \\ v_{\beta_2} \\ v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix}$$

EPFL

Exemple - Quadrilatère

α $2\times$, β $2\times$, γ, δ

$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$



III. Modèle fonctionnel (option) pas correct !

- $\mathbf{B}_{\text{III.}}$

faux ?: $\frac{1}{2}\ell_{\alpha_1} + \frac{1}{2}\ell_{\alpha_2} + \frac{1}{2}\ell_{\beta_1} + \frac{1}{2}\ell_{\beta_2} + \ell_\gamma + \ell_\delta - 400 \doteq 0$

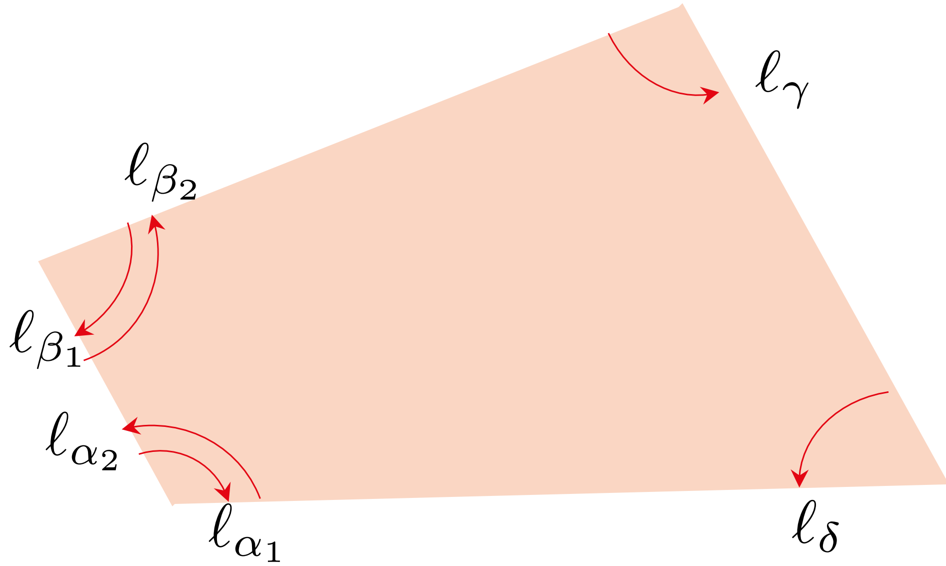
Pourquoi faux ?

- les observations (aléatoires) de ℓ_{α_1} et ℓ_{α_2} n'ont pas la même valeur !
- — " — de ℓ_{β_1} et ℓ_{β_2} — " —
- or $v_{\alpha_1} \neq v_{\alpha_2}$ & $v_{\beta_1} \neq v_{\beta_2}$ (en générale)

Exemple - Quadrilatère

$\alpha\ 2\times,\ \beta\ 2\times,\ \gamma,\ \delta$

$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$



- Remarques

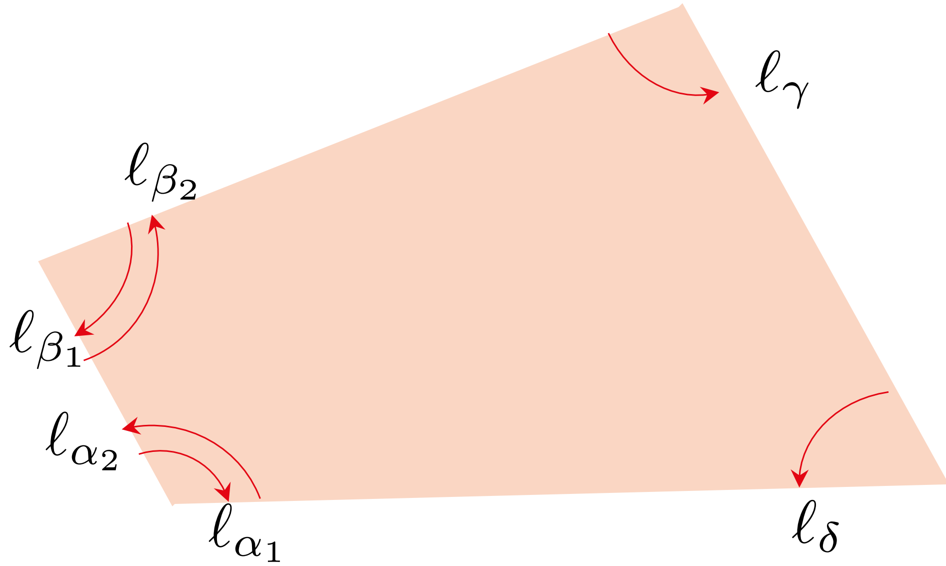
$$\hat{v} = Q_{\ell\ell} \overbrace{B^T (B Q_{\ell\ell} B^T)^{-1}}^{K} \, w \qquad B\cdot(\ell - c)$$

↳ pour le cas linéaire : $w = B \cdot (\ell - \underbrace{400}_{c})$ après l'applic. de const. connue

- K = Kernel
- K est indépendant le choix de B } ⇒ • $\hat{v}$ seront les mêmes pour $B_I, B_{II}, B_{III}, \ldots$ [+ indep. pour $\hat{\ell}$] tous les conditions indépendants !

  $\hat{\ell} = \ell + \hat{v}$
- par contre : $w_I \neq w_{II} \neq \ldots$

Exemple - Quadrilatère

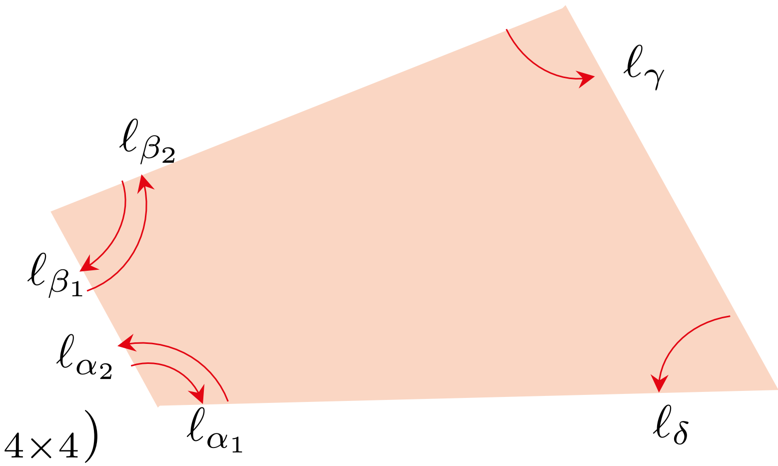


α $2\times$, β $2\times$, γ, δ

$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$

- Exemple numérique
  - Moodle – `quadri_condi.py`
  - 3 solutions
    - Via moyenne $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, γ, δ, optimale?
    - Direct (une d'option possible)
    - Direct, d'avantage de conditions ?

ME – Exercice : Quadrilatère



- Angles des précision inégale
- Options
  - A) pondération des mesures répétées $(r = 1\,,\ \mathbf{P}_{4\times 4})$
  - B) combinaison directe des mesures brutes $(r = 1\,,\ \mathbf{P} = \mathbf{I}_6)$
  - C) idem, les répétitions en plus $(r = 3\,,\ \mathbf{P} = \mathbf{I}_6)$
  - D) solution simple et élégante $(r = 3\,,\ \mathbf{P} = \mathbf{I}_6)$
  - E) condition redondante $(r = 4\,,\ \mathbf{P} = \mathbf{I}_6)$ $\longrightarrow$ boum!

- Avantages, inconvénients, fautes …
- Code *Python* commenté

- Distinguer le modèle *fonctionnel* et le modèle *stochastique*
- Exprimer toute l’information de façon explicite