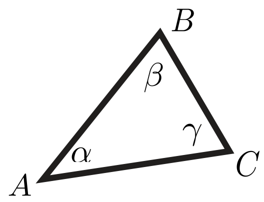
Nous avons réussi, nous avons des résidus et des paramètres compensées ! (La dernière fois)

- Rappel: pourquoi compenser? (*polycopié, page viii*)
  - ***O****ptimiser* les mesures (et les modèles)
  - ***D****étecter* une faute
  - ***E****stimer* la précision
  - ***A****méliorer* les résultats

Ensemble (pour observations) :
« **ODE A** *LA JOIE*»)..

- Aujourd'hui : Comment *estimer* la précision ?
  - De paramètres ? $\hat{\mathbf{x}} \longleftarrow Q_{\hat{x}\hat{x}}$
  - Des résidus ? $\hat{\mathbf{v}} \longleftarrow Q_{\hat{v}\hat{v}}$
  - Des observations compensées ? $\hat{\ell} \longleftarrow Q_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$
  - (mardi) Ecart-type *a posteriori* ? $\hat{\sigma}_0$

- Comment les appliquer au problème connu? (p.ex. au triangle)



Compensation paramétrique

9. Estimation de <u>précision de paramètres</u>

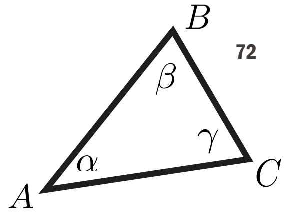
- Rappel des « ingrédients » au départ:
  - Solution pour les paramètres: $$\delta\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}}_{\mathbf{G}}\,\mathring{\mathbf{v}}$$
  - la variation de $\mathring{\mathbf{v}} \longrightarrow \delta\mathbf{x}$ cause un changement dans les paramètres via **G**

- Propagation par variance : $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \mathbf{G}\cdot\mathbf{Q}_{\ell\ell}\cdot\mathbf{G}^T$
  - En détail (**P** et **N** est symétrique)
    - $$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\cdot\underbrace{\mathbf{Q}_{\ell\ell}}_{\mathbf{P}^{-1}}\cdot\mathbf{P}\mathbf{A}\underbrace{\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}}_{\mathbf{N}^{-1}}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1} \qquad (4.20)$$

$$\Longrightarrow \delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathring{\mathbf{v}}$$

Exemple de triangle en compensation paramétrique



$$\begin{bmatrix} \ell_\alpha \\ \ell_\beta \\ \ell_\gamma \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 200 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_0} - \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_\gamma \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & \cdot \\ \cdot & +1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

- Numériquement
  - eq. normales $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
  - inverse $\mathbf{N}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$
  - Interprétation
    - Diagonal $q^2_{\hat{\alpha}} = q^2_{\hat{\beta}} = q^2_{\hat{\gamma}} = \frac{2}{3} \longrightarrow \sigma_{\hat{\alpha}} = \sigma_{\hat{\beta}} = \sigma_{\hat{\gamma}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_{\ell_i}$
    - Hors diagonal (p. ex.)

$$q_{\hat{\alpha}} q_{\hat{\beta}} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \longrightarrow -50\%$$

    - Pourquoi?

Si l'un des angles d'un triangle augmente d'un certain montant, les deux autres doivent être réduits (de la moitié de ce montant chacun) pour respecter la condition !

Compensation paramétrique

10. Estimation de précision de résidus

- Rappel des « ingrédients » au départ:
  - Solution pour les paramètres: $\hat{\mathbf{v}} = \ell - \left[f\left(\mathring{\mathbf{x}}\right) + \mathbf{A}\delta\mathbf{x} \right] = \mathring{\mathbf{v}} - \mathbf{A}\delta\mathbf{x}$
  - Insérer $\Longrightarrow \delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathring{\mathbf{v}}$ dans la relation précédente, on obtient

$$\hat{\mathbf{v}} = \underbrace{\left[\mathbf{I} - \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\right]}_{\mathbf{H}}\mathring{\mathbf{v}}$$

- Propagation par variance :

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}_{\ell\ell} \cdot \mathbf{H}^T$$

  - Après substitution et multiplication, certains termes (longs) seront l'inverse d'autres termes (longs), ce qui produira une relation simple:

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\mathbf{A}^T \qquad (4.23)$$

Compensation paramétrique

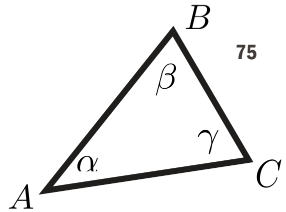
10. Estimation de <u>précision de résidus</u>

- Autre raisonnement :
  - $\hat{\ell} = f(\hat{\mathbf{x}})$
  - $\Longrightarrow \delta\hat{\ell} = \mathbf{A} \cdot \delta\hat{\mathbf{x}}$
  - Propagation par variance $\Longrightarrow \mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathbf{A}^T$

- Relation avec la *compensation conditionnelle* :
  - Après substitution dans la relation précédente $\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} + \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\mathbf{A}^T}_{\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}}}$

$$\mathbf{Q}_{\ell\ell} = \mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} + \mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$$

Exemple de triangle en compensation paramétrique



- Estimation de précision des résidus
  - Modèle stochastique $\mathbf{Q}_{\ell\ell} = \mathbf{I}_3$ $\qquad \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} +1 & \cdot \\ \cdot & +1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
  - Cofacteurs des résidus compensés

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\mathbf{A}^T$$

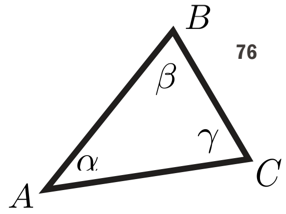
$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +1 & \cdot \\ \cdot & +1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} +1 & \cdot & -1 \\ \cdot & +1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Interprétation $\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}}$
    - Diagonal $\quad q^2_{\hat{v}_\alpha} = q^2_{\hat{v}_\beta} = q^2_{\hat{v}_\gamma} = \frac{1}{3} \qquad \longrightarrow \sigma_{\hat{v}_\alpha} = \sigma_{\hat{v}_\beta} = \sigma_{\hat{v}_\gamma} \frac{1}{\sqrt{3}}$
    - Hors diagonal (p. ex.)

$$q_{\hat{v}_\alpha} q_{\hat{v}_\beta} = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{1}} = 1 \longrightarrow 100\%$$

      - Les résidus compensés sont égaux, dont entièrement corrélés.

Exemple de triangle en compensation paramétrique



- Estimation de précision des observations compensées

  - Cofacteurs des observations compensées

$$\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{A}^T$$

$$= \begin{bmatrix} +1 & \cdot \\ \cdot & +1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & \cdot & -1 \\ \cdot & +1 & -1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

  - Interprétation $\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$

    - Diagonal $q^2_{\hat{\ell}_\alpha} = q^2_{\hat{\ell}_\beta} = q^2_{\hat{\ell}_\gamma} = \frac{1}{3} \qquad \longrightarrow \sigma_{\hat{\ell}_\alpha} = \sigma_{\hat{\ell}_\beta} = \sigma_{\hat{\ell}_\gamma} \frac{1}{\sqrt{3}}$

    - Hors diagonal (p. ex.) $q_{\hat{\ell}_\alpha} q_{\hat{\ell}_\beta} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \longrightarrow -50\%$

    - Pourquoi? Résonnement identique (comme pour la matrice des cofacteurs des résidus compensés)

Résumé

- Estimation de précision (en peut différemment que dans le Chap. 4.5)
  - A partir d'une solution pour:
    - Les paramètres compensés
    - Les résidus compensés
  - Nous avons appliqué nos connaissances acquises (dans Block I de ME) pour obtenir des nouvelles relations permettant d'estimer
    - Précision des paramètres
    - Précision des résidus compensés
    - Précision des observations compensées
  - Mardi
    - Écarte type a posteriori $\hat{\sigma}_0$ et analyse de résultats (4.5 et 4.6 - lire avant, 2p.)
    - Quotient d'erreur moyenne $\hat{\sigma}_0 / \sigma_0$
    - D'avantage sur l'itération (évent. l'analyse de résultats)