Agenda – parametres ou/et conditions

1. Conditions entre les paramètres
   - Exemples: simple et plus compliqué

2. Exercice au tableau
   - Conditions <u>et / ou</u> paramètres

Compensation paramétrique avec contraintes

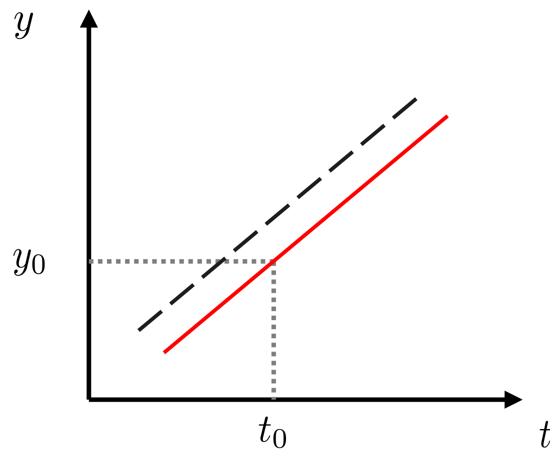
- Dernière fois
  - Compensation conditionnelle avec paramètres
    - Générale $f\left(\ell - \mathbf{v}, \mathring{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}\right) = 0$
    - Linéarisé $\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{A}\delta\mathbf{x} - \mathbf{w} = 0$

- Aujourd'hui
  - Avec des conditions entre (quelques) paramètres (plutôt que entre les mesures)

$$g\left(\mathring{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}\right) = 0$$

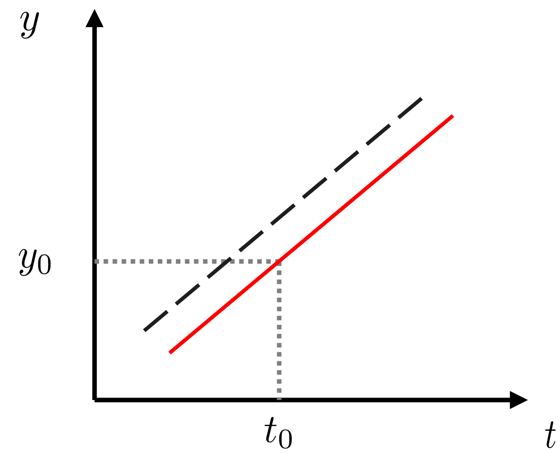
  - Exemple simple d'abord …
    - Régression linéaire $y = a + b \cdot t$

    ou on veut imposer $a = y_0 - b \cdot t_0$



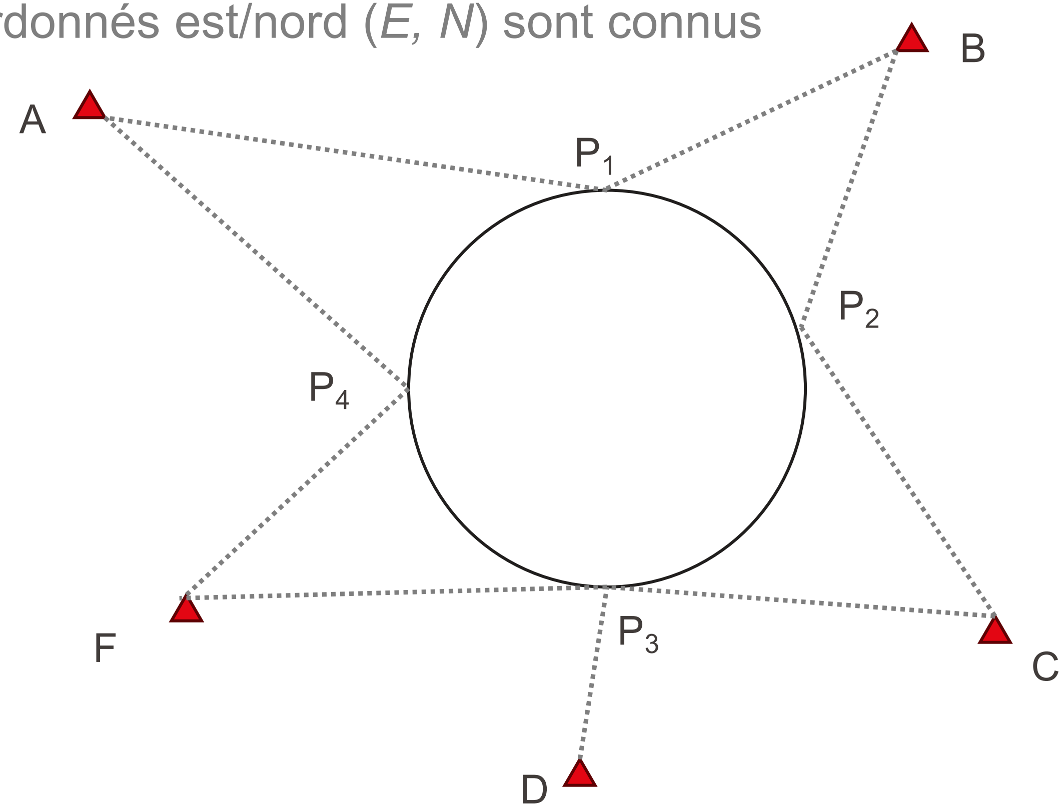
Compensation paramétrique avec contraintes

- D'abord $y = a + b \cdot t$ avec $a_0 = y - b \cdot t_0$
- Solutions
  1. Ajoute l'observation fictive $\ell_{a_0} - v_{a_0} = y_0 - b \cdot t_0$ avec $\sigma_{\ell_0} << 0$ mais $\sigma_{\ell_0} \neq 0!$
  2. Elimination de paramètre
     - exprimé le contraint $a = y_0 - b \cdot t_0$
     - remettre le dans d'autres observations $\longrightarrow y_i = y_0 - b\,t_0 + b\,t_i = y_0 + b\,(t_i - t_0)$
  3. Contraint condition sans observation
     - cas particulier de $\mathbf{Bv} - \mathbf{A}\delta\mathbf{x} = 0$ avec $\mathbf{B}_i = 0$
       - $\left(\mathbf{BQ}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right) \longrightarrow$ pseudo-inverse
       - `np.linalgo.pinv(B@Q11@B.T)`
       - (SVD) – décomposition aux valeurs propres, 0 en diag.
  4. Générale – cas combiné avec le contraint g(x)



Compensation paramétrique avec contraintes

- Exemple plus compliqué
  - quatre points $P_{1\text{-}4}$ (doit être positionnés) sur un cercle de rayon inconnu
  - on mesure de distances (toutes ne sont pas dessinées) depuis les points A,B,C,D,F dont les coordonnés est/nord (*E, N*) sont connus

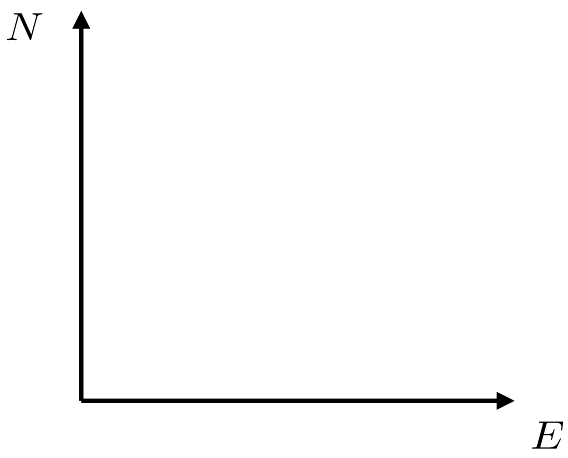


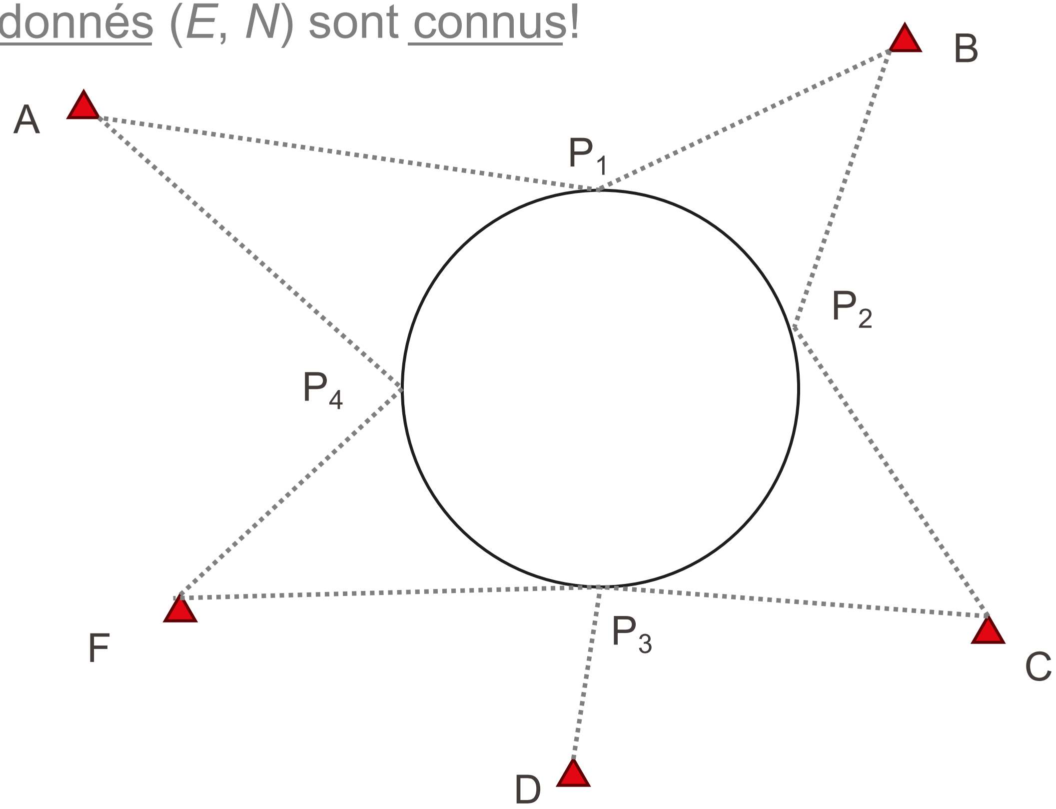
Compensation paramétrique avec contraintes

- Approche générale $g\left(\hat{\mathbf{x}}\right)=0\ \&\ f(\hat{\mathbf{x}},\,\hat{\ell})=0$
  - contraint dans les modèle paramètrique $\boxed{g\left(\mathring{\mathbf{x}}+\delta\mathbf{x}\right)=0}$
  - linéarisation
$$\underbrace{g\left(\mathring{\mathbf{x}}\right)}_{\mathbf{t}}+\underbrace{\left.\frac{\partial g(\cdot)}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathring{\mathbf{x}}}}_{\mathbf{U}}\delta\mathbf{x}=0$$
  - Lagrange
$$\Omega=\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}-2\mathbf{k}_1\left(\mathbf{B}\mathbf{v}-\mathbf{A}\delta\mathbf{x}-\mathbf{w}\right)\boxed{-\,2\mathbf{k}_2\left(\mathbf{t}+\mathbf{U}\delta\mathbf{x}\right)}\rightarrow\text{min.}$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{v}}=\cdots=0$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{k_1}}=\cdots=0$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{x}}=\cdots=0$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{k}_2}=\cdots=0$$
  - Solution
    - analytique, p.ex. Förstner & Wrobel, 2016 (Photogrammetric Computer Vision)
    - comme dans la compensation combinée, tout en ajoutant une observation fictive $-\mathbf{t}-\mathbf{v}_t=\mathbf{U}\delta\mathbf{x}$ avec le poids ~100 fois plus large ($\sigma_t=10\times\downarrow$)

Compensation paramétrique avec contraintes

- Exemple plus compliqué
  - quatre points $P_{1\text{-}4}$ (doit être positionnés) sur un cercle de rayon inconnu
  - on mesure de <u>distances</u> (toutes ne sont pas dessinées) depuis les points A,B,C,D,F dont les <u>coordonnés</u> (E, N) sont <u>connus</u>!



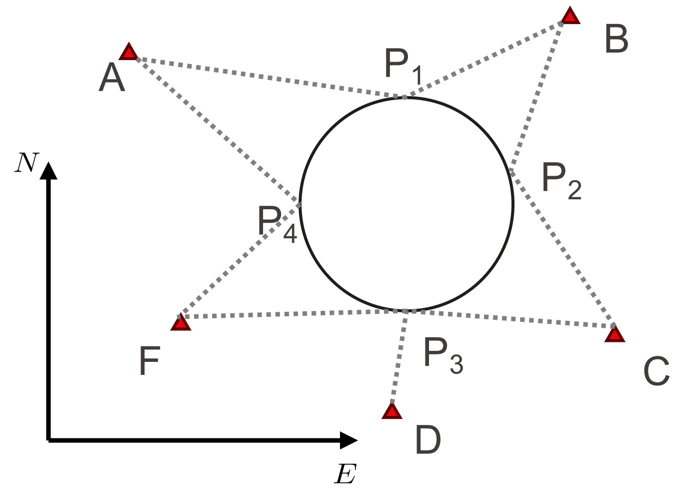


Compensation paramétrique avec contraintes

- Point de départ - modèle paramétrique de mesures

$$\begin{cases} \ell_1 - v_1 & = f_1(E_1, N_1, \cdots, E_4, N_4) \\ \quad \vdots & \quad \vdots \\ \ell_n - v_n & = f_n(E_1, N_1, \cdots, E_4, N_4) \end{cases} \quad \texttt{ou} \quad \ell - \mathbf{v} = \mathbf{f}(E_1, N_1, \cdots E_4, N_4)$$

- Question
  - Comment peut-on exprimer la condition que 4 points soient situés sur un cercle?
  - Indice : comment définir un cercle?



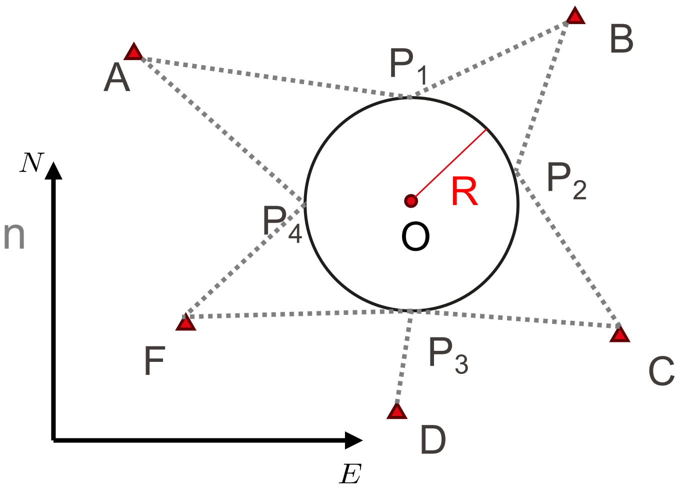
Compensation paramétrique avec contraintes

- Point de départ - modèle paramétrique de mesures

$$\begin{cases} \ell_1 - v_1 & = f_1(E_1, N_1, \cdots, E_4, N_4) \\ \quad\vdots & \qquad\qquad\vdots \\ \ell_n - v_n & = f_n(E_1, N_1, \cdots, E_4, N_4) \end{cases} \quad \texttt{ou} \quad \ell - \mathbf{v} = \mathbf{f}(E_1, N_1, \cdots E_4, N_4)$$

- Question
  - Comment peut-on exprimer la condition que 4 points soient situés sur un cercle?
  - Indice : comment définir un cercle?
    - rayon R = constante
    - faire intervenir les coordonnés de points P_i en relation avec de coordonnées de centre de cercle (E_O, N_O)

$$\sqrt{(E_i - E_O)^2 + (N_i - N_O)^2} - R = 0 \quad i = 1 \ldots 4$$



Compensation paramétrique avec contraintes

- Situation avec $\sqrt{(E_i - E_O)^2 + (N_i - N_O)^2} - R = 0 \quad i = 1 \ldots 4$
  - 4 équations contiennent de nouveaux paramètres – E_O, N_O, R

- Options
  I. utiliser 3 équations, éliminer les paramètres inconnus et obtenir un contraint
  II. faire usage de nouvelles mesures « précises » (fictives/pseudo)

$$\begin{cases} 0 - v_{P_1} = f_1(E_1, N_1, E_O, N_O, R) = \sqrt{(E_1 - E_O)^2 + (N_1 - N_O)^2} - R \\ \vdots \\ 0 - v_{P_4} = f_1(E_4, N_4, E_O, N_O, R) = \sqrt{(E_4 - E_O)^2 + (N_4 - N_O)^2} - R \end{cases}$$

- Surdétermination ?
  - supposer 11 observations réelles (distances)
  - au crayon …