ME 13: Agenda

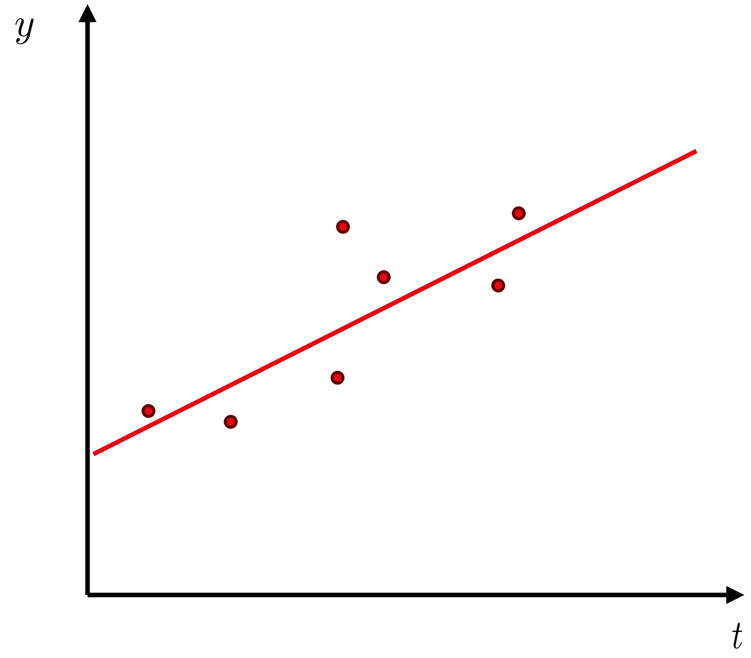
- Choix de compensation
  - conditionnelle versus paramétrique
  - avantages et inconvénients

- Modèle combiné
  - Pourquoi
  - Comment?

Pourquoi combiné ? (1/3)

- Exemple de régression linéaire
  - Nous savon compenser (ajuster) par *t* parfait
  - Comment ?
  - Dans le « jargon ME »

$$y_i = a + b \cdot t_i \implies \ell_i - v_i = x_1 + x_2 \cdot t_i$$
$$\implies \boldsymbol{\ell} - \mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

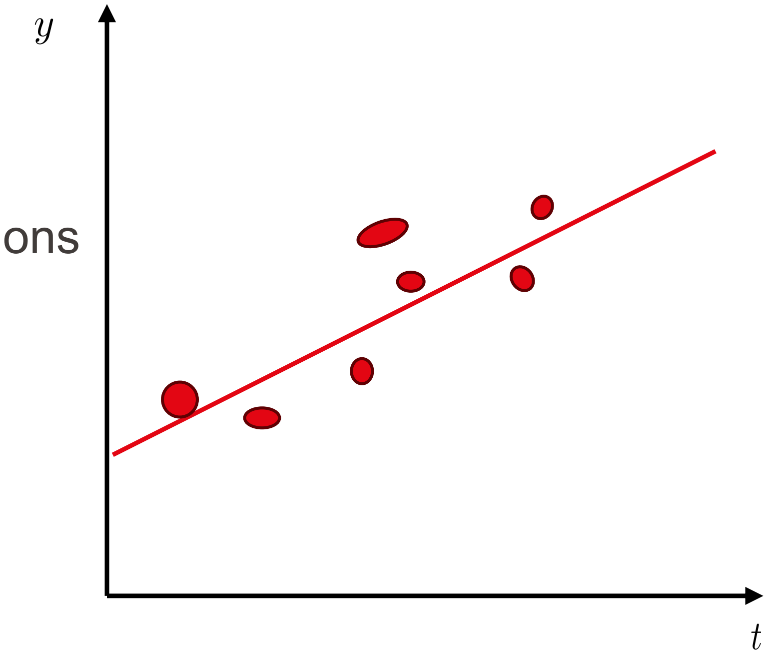


  - en détail :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\ell}$$

  - on peut faire de la même façon si *y* est parfait et *t* est observé ...

Pourquoi combiné ? (2/3)



- Nouveau:
  - Nous savon les résidus dans les deux directions

$$(y_i - v_{y_i}) = a + b \cdot (t_i - v_{t_i})$$

  - Comment procéder ?

1. Compensation <u>conditionnelle</u>
   - éliminer les paramètres

$$(a,\, b) \longrightarrow r = (n-2) \text{ conditions}$$

2. Compensation <u>paramétrique</u>
   - p. ex.

$$\begin{array}{ll} t_i - v_{t_i} = T_i & \longrightarrow n \text{ eq. avec } n \times T \text{ par.} \\ y_i - v_{y_i} = a + b \cdot T_i & \longrightarrow n \text{ eq. avec } (n \times T + 2) \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} N = & 2n \\ U = & n+2 \\ r = & N - U = 2n - n - 2 = n - 2 \end{array} \right.$$

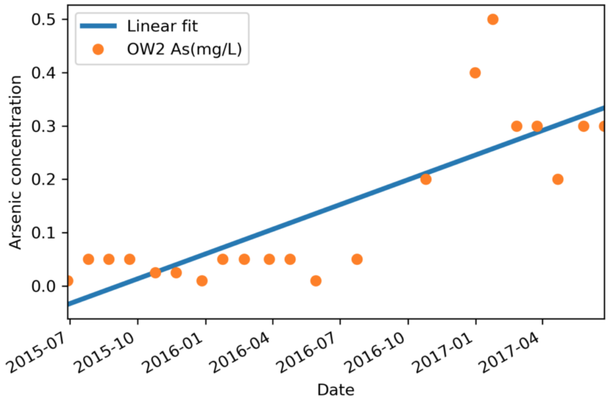
   - surdétermination ne change pas!

Encore comment changer le modèle fonctionnel ...

- Choix des paramètres: alternative pour une droite
  - Modèle classique: paramètres a et b
    - avantage: modèle linéaire
    - inconvénient: détours pour obtenir t_{min} , t_{max} et leurs cofacteurs
  - Modèle alternatif: paramètres t_{min} et t_{max}
    - inconvénient: modèle non-linéaire
    - avantage: on obtient directement t_{min} , t_{max} et leurs cofacteurs

- Elimination des paramètres → conditions identiques!
  - n équations à 2 paramètres
  - n-2 équations sans paramètres

Démonstration sur Moodle!

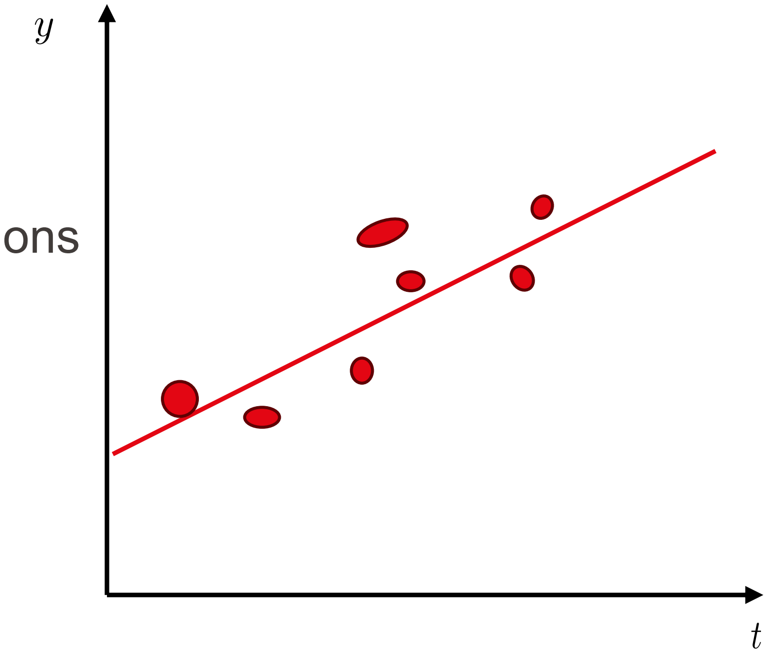


Pourquoi combiné ? (3/3)

- Nouveau:
  - Nous savon les résidus dans les deux directions

$$(y_i - v_{y_i}) = a + b \cdot (t_i - v_{t_i})$$

  - Comment procéder ?



3. Compensation <u>combinée</u>

$$f\left(\ell - \mathbf{v}, \mathring{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}\right) = 0$$

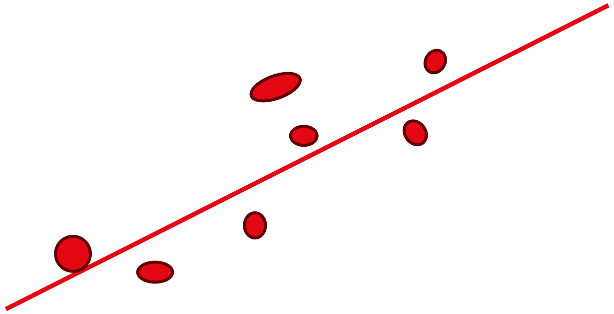
$$(y_i - v_{y_i}) - [a + b \cdot (t_i - v_{t_i})] = 0$$

  - on linéarise

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f()}{\partial \mathbf{x}} \longrightarrow m\,(\text{conditions}) \times u\,(\text{param.})$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial f()}{\partial \ell} \longrightarrow m\,(\text{conditions}) \times n\,(\text{obs.})$$

Compensation combinée



- Modèle
  - générale (idéal) $f\left(\ell-\mathbf{v}, \mathring{\mathbf{x}}+\delta\mathbf{x}\right)=0$
  - linéarisé $\mathbf{B}\mathbf{v}-\mathbf{A}\delta\mathbf{x}-\mathbf{w}=0$
  - Lagrange $\Omega=\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}-2\mathbf{k}\left(\mathbf{B}\mathbf{v}-\mathbf{A}\delta\mathbf{x}-\mathbf{w}\right)\rightarrow \min.$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{v}} = \dots = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{x}} = \dots = 0$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{k}} = \dots = 0$$

  - solution

$$\delta\hat{\mathbf{x}} = -\left[\mathbf{A}^T\underbrace{\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1}}_{\mathbf{P}^*}\mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{A}^T\underbrace{\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1}}_{\mathbf{P}^*}\cdot\mathbf{w}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \dots$$

Compensation combinée – algorithme

1. Formulation du problème : $f(\breve{\ell}, \breve{\mathbf{x}}) = 0$.
2. Matrice de covariance : $\mathbf{K}_{\ell\ell} =?$ où $\sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\ell\ell} =?$.
3. Choix des valeurs initiales : $\mathring{\mathbf{x}}$.
4. Calcul des écarts : $\mathbf{w} = f(\ell, \mathring{\mathbf{x}})$.
5. Matrices des dérivées : $\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$, $\mathbf{B} = \frac{\partial f}{\partial \ell}$.
6. Matrice auxiliaire : $\mathbf{S} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T)^{-1}$.
7. Résidu provisoire : $\mathring{\mathbf{v}}^* = \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}$, et $\mathbf{A}^* = -\mathbf{S}\mathbf{A}$.
8. Covariance des paramètres : $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}^*\mathbf{A})^{-1}$. $\quad \mathbf{P}^* = (\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T)^{-1}$
9. Correction des paramètres : $\delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\mathbf{A}^*\mathbf{P}^*\mathring{\mathbf{v}}^*$, et $\hat{\mathbf{x}} = \mathring{\mathbf{x}} + d\hat{\mathbf{x}}$.
10. Correction des résidus : $\hat{\mathbf{v}} = \mathring{\mathbf{v}}^* - \mathbf{A}^T d\hat{\mathbf{x}}$, et $\hat{\ell} = \ell - \hat{v}$.
11. Contrôle des calculs : $\hat{\mathbf{w}} = f(\hat{\ell}, \hat{\mathbf{x}}) = 0$.

Synthèse: conditions <u>ou</u> paramètres ?

- Choix du type de compensation
  - Cours: moyenne, triangle, quadrilatère, gaz parfait
  - Polycopiée: exercices résolus 3.7.1 et 4.9.1: résistances
    - En particulier: trace $Q_{\hat{v}\hat{v}} = 2$
    - chapitres 2, 3, 4 et 6: minerai (= *fil rouge*)
  - Tests 2 et 3

- Exercice 11 → avantages et inconvénients
  - Choix des conditions – valeurs approchées
  - *Taille* des matrices
  - Calculs, itérations, contrôles
  - Résultats compensés et fonctions des résultats compensés
  - Indicateurs de fiabilité

Trop souvent, on oublie les conditions !

Synthèse: conditions et paramètres ?

$$Q_{\hat{v}\hat{v}} = 2$$

- Où sont les observations ?
  - Inversion de l'abscisse et de l'ordonnée
    - Pour la sinusoïde, on observe y_i (imparfaitement) pour t_i parfait
    - Si l'on observe t_i pour y_i parfait → exercice 4.10.2
- Conditions avec paramètres
  - Introduction: observation de l'abscisse et de l'ordonnée
    - Les modèles connus ne sont pas applicables
    - Leur application est laborieuse
  - Expression du modèle combiné et cas particuliers
- Applications
  - Régression linéaire: exercice 6.4.1 (synthèse de démo sur Moodle, semaine 13)
    - Modèle conditionnel: éliminer 2 paramètres → n = 12, r = 4, u = 0
    - Modèle paramétrique: ajouter des paramètres → n = 12, r = 4, u = 8
    - Modèle combiné → polycopié

Tout sous le même toit !