Agenda 7-1 : Certitude des résultats

- Propagation des cofacteurs
  - Cofacteurs des résidus compensés, $Q_{\hat{v}\hat{v}}$
  - Cofacteurs des observations compensées, $Q_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$

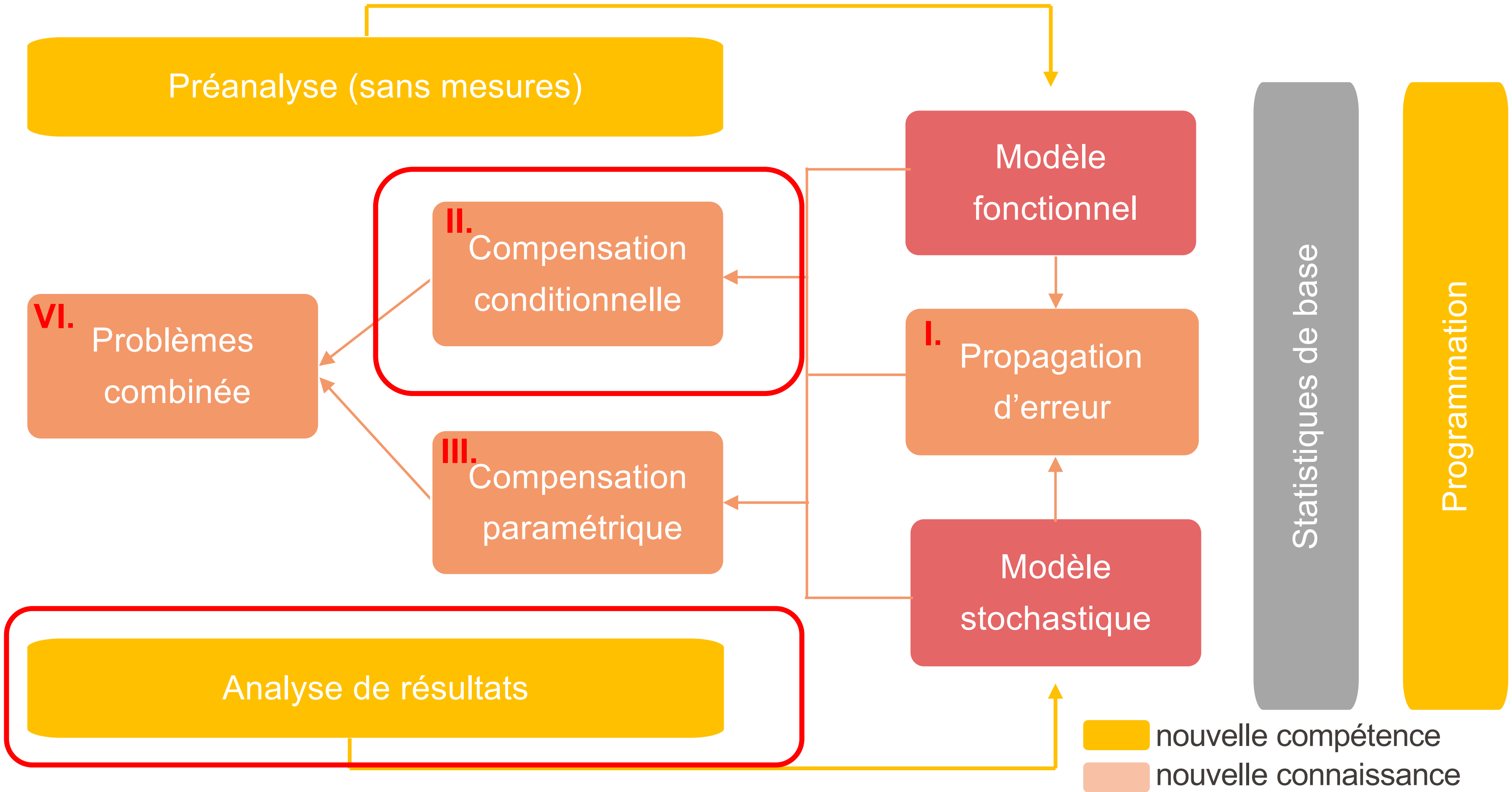
- Application au triangle avec mesure des angles
  - Calcul des cofacteurs
  - Interprétation
    - Diagonale et écarts-types
    - Corrélations

Nous avons réussi, nous avons des résidus et des observations compensées ! $\hat{\ell} = \ell - \hat{\mathbf{v}}$

résultats
OK ?

ME Cockpit de matières et de compétences

- Comment réussir à observer et estimer avec confiance?



Méthodes d'estimation

automne 2025 mardi 14:15 – 15:00
jeudi 08:15 – 11:00

09 sep.	introduction
	Propagation d'erreur
11 sep.	Eléments de statistique
sem. 02	Observations corrélées
sem. 03	Linéarisation
sem. 04	Poids et cofacteurs + révision
07 oct.	Contrôle continue (auto-correct.)
	Compensation conditionnelle
09 oct.	Mesures direct et indirect
sem. 06	Introduction, modèles, solution
sem. 07	Analyse des résultats
sem. 08	Exemples + révision
11 nov.	Contrôle continue (20% de note)
	Compensation paramétrique
13 nov.	Pré-analyse
sem. 10	Modèle fonctionnel
sem. 11	Analyse des résultats
sem. 12	Exemples + révision
09 déc.	Contrôle continue (auto-correct.)
	Problèmes combinés
11 déc.	Conditions ou paramètres?
sem. 14	Conditions et paramètres!
…	…
27 jan.	**Examen écrit (~~90~~ 120 minutes)**

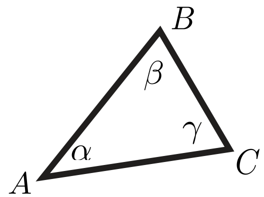
EPFL

Nous avons réussi, nous avons des résidus et des observations compensées ! (La dernière fois)

- Rappel: pourquoi compenser? (*polycopié, page viii*)
  - ***Optimiser*** les <u>mesures</u> (et les <u>modèles</u>)
  - ***Détecter*** une <u>faute</u>
  - ***Estimer*** la <u>précision</u>
  - ***Améliorer*** les <u>résultats</u>

Ensemble (pour observations) :
« **ODE A** *LA JOIE*»)..

- Aujourd'hui :
  - Comment *estimer* la <u>précision</u> ?
    - Des résidus ? $\hat{\mathbf{v}}$ $\qquad \hat{\mathbf{v}} \longleftarrow Q_{\hat{v}\hat{v}}$
    - Des observations compensées ? $\hat{\ell} \longleftarrow Q_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$
    - (jeudi) Ecart-type *a posteriori* ? $\hat{\sigma}_0$
  - Comment les appliquer au problème connu? (p.ex. au triangle)



Compensation conditionnelle

6. Estimation de précision

- Rappel des « ingrédients » **au départ**:
  - les conditions $\mathbf{f}(\ell)$ d'observation ℓ , avec leur écartes de fermeture: $\mathbf{w} = \mathbf{f}(\ell)$
  - forme linéaire des conditions via le Jacobien: $\mathbf{B} = \partial \mathbf{f}(\ell)/\partial \ell,$
  - modèle stochastique des observations: $\mathbf{Q}_{\ell\ell}$

- Rappel des résultats:
  - équation (3.10) qui relie les mesures dans le modèle fonctionnel (écartes de fermeture $\mathbf{w}$) et le modèle stochastique avec les résidus compensés $\hat{\mathbf{v}}$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \cdot \mathbf{w} \qquad (3.10)$$

  - correction de observations:

$$\hat{\ell} = \ell - \hat{\mathbf{v}} \qquad (3.11)$$

Compensation conditionnelle

7. Estimation de précision (en peut différemment que dans le Chap. 3.3)

- L'idée principale :
  1. Faire usage d'équation (3.10) , qui relie les mesures ℓ dans le modèle fonctionnel (écartes de fermeture) et le modèle stochastique avec les résidus compensés

$$g\left(\mathbf{w},\, \mathbf{B},\, \mathbf{Q}_{\ell\ell}\right) \longrightarrow \hat{\mathbf{v}}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \underbrace{\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \cdot \mathbf{w}}_{g(\,)} \qquad (3.10)$$

  2. Appliquer la propagation de variance pour cette fonction

- En d'autres termes : si ℓ change (un peu), comment change le $\hat{\mathbf{v}}$?
  - Mathématiquement on pourrait exprimer ça comme: $\dfrac{\delta\hat{\mathbf{v}}}{\delta\ell} = \dfrac{\partial g(\ell)}{\partial\ell}$
  - Quelle partie de (3.10) dépend de ℓ ?

Compensation conditionnelle

8. Estimation de précision des résidus

- En d'autres termes : si ℓ change, comment $\hat{\mathbf{v}}$ change?
  - Nous admettons que $\mathbf{w}$ dépend de ℓ, car $\mathbf{w} = \mathbf{f}(\ell)$
  - $\mathbf{B}$ dépend également de ℓ, mais *seulement au deuxième ordre* … que nous ignorons!

1. Alors si $\hat{\mathbf{v}} = \underbrace{\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1}}_{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{w}$

2. Leur variation par rapport d'ℓ : $\dfrac{\delta\hat{\mathbf{v}}}{\delta\ell} = \mathbf{G} \cdot \dfrac{\partial\mathbf{f}(\ell)}{\partial\ell}$ $\mathbf{B}$

$$\longrightarrow \delta\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{B}\,\delta\ell$$

- Donne la relation de base pour la propagation de la variance

Compensation conditionnelle

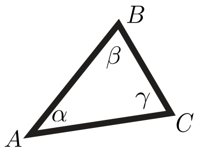
9. Estimation de précision des résidus

- Appliquer la propagation de variance au $\delta\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{G}\cdot\mathbf{B}\,\delta\ell$
  - En générale : $\mathbf{Q}_{yy} = \mathbf{F}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{F}^T$
  - En particulier (ici) : $\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \underbrace{\mathbf{G}\mathbf{B}}_{\mathbf{F}}\,\mathbf{Q}_{\ell\ell}\,\underbrace{\mathbf{B}^T\mathbf{G}^T}_{\mathbf{F}^T}$

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \underbrace{\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1}}_{\mathbf{G}}\cancel{\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)}\underbrace{\cancel{\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1}}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}}_{\mathbf{G}^T}$$

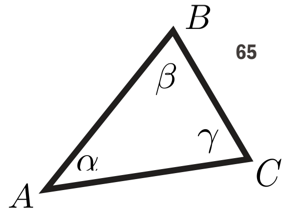
$$\boxed{\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}}$$

- Comment l'appliquer ?
  - Example de triangle …



Exemple de triangle en compensation conditionnelle

$$\ell_\alpha = 035.471\,\text{gon}$$
$$\ell_\beta = 107.383\,\text{gon}$$
$$\ell_\gamma = 057.122\,\text{gon}$$



- Estimation de précision des résidus
  - Modèle stochastique $\mathbf{Q}_{\ell\ell} = \mathbf{I}_3$
  - Résidus compensés (dernière fois)
  - Cofacteurs des résidus compensés

$$\hat{\mathbf{v}} = \overbrace{\mathbf{I}_3}^{\mathbf{Q}_{\ell\ell}} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}^T} \overbrace{(3)^{-1}}^{\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1}} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w/3 \\ w/3 \\ w/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \mathbf{B}\,\mathbf{Q}_{\ell\ell}$$
$$= \dots$$

- Interprétation $\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}}$
  - Diagonal $q^2_{\hat{v}_\alpha} = q^2_{\hat{v}_\beta} = q^2_{\hat{v}_\gamma} = \dots \longrightarrow \sigma_{\hat{v}_\alpha} = \sigma_{\hat{v}_\beta} = \sigma_{\hat{v}_\gamma} = \dots$
  - Hors diagonal (p. ex.) $q_{\hat{v}_\alpha \hat{v}_\beta} = q_{\hat{v}_\alpha \hat{v}_\gamma} = q_{\hat{v}_\beta \hat{v}_\gamma} = \dots$

$$\rho_{\hat{v}_\alpha \hat{v}_\beta} = \frac{\cdot}{\cdot \;\; \cdot} = \cdots \longrightarrow \dots\%$$

  - \- les résidus compensés sont égaux, dont entièrement corrélés.

Compensation conditionnelle

10. Estimation de précision de observations compensées

- Selon (3.11) : $\hat{\ell} = \ell - \hat{\mathbf{v}}$
  1. Variation

$$\delta\hat{\ell} = \underbrace{\left(\mathbf{I} - \underbrace{\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1}}_{\mathbf{G}}\mathbf{B}\right)}_{\mathbf{H}}\delta\ell$$

  2. Cofacteurs

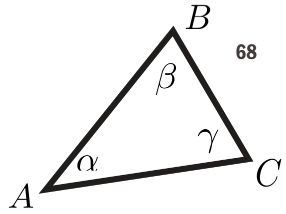
$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} &= \mathbf{H}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{H}^T \\ &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1}\mathbf{B}^T\right)\mathbf{Q}_{\ell\ell}\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\right) = \ldots \\ \cdots &= \mathbf{Q}_{\ell\ell} - \underbrace{\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}}_{\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}}}\end{aligned}$$

avant compensation $\mathbf{Q}_{\ell\ell} = \boxed{\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} + \mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}}}$ après compensation

- En langage simplifié $\Longrightarrow \mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} \ll \mathbf{Q}_{\ell\ell}$

objectif atteint: améliorer les résultats!

Exemple de triangle en compensation conditionnelle



- Estimation de précision des observations compensées:
  - Pour des résidus compensés

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \mathbf{B}\,\mathbf{Q}_{\ell\ell} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Pour les observations compensées

$$\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} - \mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \quad \ldots$$

  - Interprétation $\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$
    - Diagonal

$$q^2_{\hat{\ell}_\alpha} = q^2_{\hat{\ell}_\beta} = q^2_{\hat{\ell}_\gamma} = \ldots \qquad \longrightarrow \sigma_{\hat{\ell}_\alpha} = \sigma_{\hat{\ell}_\beta} = \sigma_{\hat{\ell}_\gamma} = \sqrt{\ldots} \cdot \sigma_{\ell_i}$$

    - Hors diagonal (p. ex.) $q_{\hat{\ell}_\alpha \hat{\ell}_\beta} = q_{\hat{\ell}_\alpha \hat{\ell}_\gamma} = q_{\hat{\ell}_\beta \hat{\ell}_\gamma} = \ldots$

$$\rho_{\hat{\ell}_\alpha \hat{\ell}_\beta} = \frac{\cdots}{\cdots \quad \cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} \quad \longrightarrow \ldots \,\%$$

    - Pourquoi? Si l'un des angles d'un triangle augmente d'un certain montant, les deux autres doivent être réduits (de la moitié de ce montant chacun) pour respecter la condition!

Résumé

- Estimation de précision (en peut différemment que dans le Chap. 3.3)
  - A partir d'une solution pour:
    - Les résidus compensés
    - Les observations compensées
  - Nous avons appliqué nos connaissances acquises (dans Block I. de ME) pour obtenir des nouvelles relations permettant d'estimer
    - Précision des résidus compensés
    - Précision des observations compensées
  - Jeudi
    - Écarte type a posteriori (Ch. 3.4 - lire avant, 1p.) $\hat{\sigma}_0$
    - Quotient d'erreur moyenne (Ch. 3.5 – lire avant, 1.p.) $\hat{\sigma}_0/\sigma_0$
    - Analyse des résultats en pratique (exercice gaz parfait + nouveau)

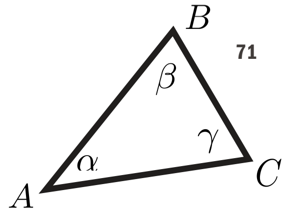
EPFL

Préparation – poser le problème
formation de condition + procédé

- Niveau 1 – triangle
- Niveau 2 – «accent de Weisshorn» (sur Moodle, ex. volontaire)
- Niveau 3 – Ex. 8 (jeudi)

Exemple de triangle en compensation conditionnelle

$$\boxed{\begin{aligned}\ell_\alpha &= 035.471\,\text{gon}\\ \ell_\beta &= 107.383\,\text{gon}\\ \ell_\gamma &= 057.122\,\text{gon}\end{aligned}}$$



- Estimation de précision des résidus
  - Modèle stochastique $\mathbf{Q}_{\ell\ell} = \mathbf{I}_3$
  - Résidus compensés (dernière fois) $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{I}_3 \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}^T} (3)^{-1} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w/3 \\ w/3 \\ w/3 \end{bmatrix}$
  - Cofacteurs des résidus compensés

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \mathbf{B}\,\mathbf{Q}_{\ell\ell}$$

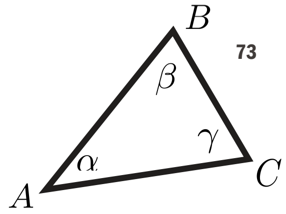
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (3)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Interprétation $\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}}$
    - Diagonal $q^2_{\hat{v}_\alpha} = q^2_{\hat{v}_\beta} = q^2_{\hat{v}_\gamma} = \frac{1}{3} \longrightarrow \sigma_{\hat{v}_\alpha} = \sigma_{\hat{v}_\beta} = \sigma_{\hat{v}_\gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_0$
    - Hors diagonal (p. ex.) $q_{\hat{v}_\alpha \hat{v}_\beta} = q_{\hat{v}_\alpha \hat{v}_\gamma} = q_{\hat{v}_\beta \hat{v}_\gamma} = 1/3$

$$\rho_{\hat{v}_\alpha \hat{v}_\beta} = \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{1}} = 1 \longrightarrow 100\%$$

    - \- les résidus compensés sont égaux, dont entièrement corrélés.

Exemple de triangle
en compensation conditionnelle



- Estimation de précision des observations compensées:
  - Pour des résidus compensés

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \mathbf{B}\,\mathbf{Q}_{\ell\ell} \;= \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Pour les observations compensées

$$\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} - \mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} \quad = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

  - Interprétation $\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$
    - Diagonal

$$q^2_{\hat{\ell}_\alpha} = q^2_{\hat{\ell}_\beta} = q^2_{\hat{\ell}_\gamma} = \tfrac{2}{3} \qquad \longrightarrow \sigma_{\hat{\ell}_\alpha} = \sigma_{\hat{\ell}_\beta} = \sigma_{\hat{\ell}_\gamma} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\sigma_{\ell_i}$$

    - Hors diagonal (p. ex.) $q_{\hat{\ell}_\alpha \hat{\ell}_\beta} = q_{\hat{\ell}_\alpha \hat{\ell}_\gamma} = q_{\hat{\ell}_\beta \hat{\ell}_\gamma} = -1/3$

$$\rho_{\hat{\ell}_\alpha \hat{\ell}_\beta} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{2} \longrightarrow -50\%$$

    - Pourquoi? Si l'un des angles d'un triangle augmente d'un certain montant, les deux autres doivent être réduits (de la moitié de ce montant chacun) pour respecter la condition !