Méthodes d'estimation

automne 2025 — mardi 14:15 – 15:00, jeudi 08:15 – 11:00

10 sep. introduction

Propagation d'erreur

12 sep. Eléments de statistique
sem. 02 Observations corrélées
sem. 03 Linéarisation
sem. 04 Poids et cofacteurs + révision
07 oct. Contrôle continue (auto-correct.)

Compensation conditionnelle

09 oct. Mesures direct et indirect
sem. 06 Introduction, modèles, solution
sem. 07 Analyse des résultats
sem. 08 Exemples + révision

11 nov. Contrôle continue (20% de note)

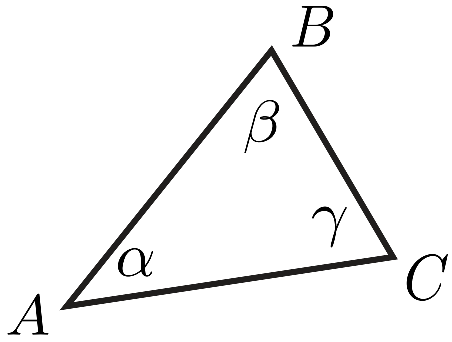
Compensation paramétrique

13 nov. Pré-analyse
sem. 10 Modèle fonctionnel
sem. 11 Analyse des résultats
sem. 12 Exemples + révision
08 déc. Contrôle continue (auto-correct.)

Problèmes combinés

11 déc. Conditions <u>ou</u> paramètres?
sem. 14 Conditions <u>et</u> paramètres!
… …
XX jan. **Examen écrit (~~90~~ 120 minutes)**

Agenda 6-1 : Compensation conditionnelle



- Retour du triangle
  - Surdétermination: compenser les 3 angles d'un seul coup?

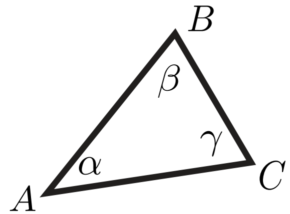
- Théorie de compensation
  - Formulation du problème (en mots +mathématique)
  - Méthode & contrôle de calcule
  - Les résultats

- Application
  - Example du triangle

EPFL

Exemple de triangle (semaine 5)
avec des angles de précision égale compensation via moyenne pondérée

$$\ell_\alpha = 035.471\,\text{gon}$$
$$\ell_\beta = 107.383\,\text{gon}$$
$$\ell_\gamma = 057.122\,\text{gon}$$



$$\sum \ell_i - 200 = -0.024 \text{ gon}$$
$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_0 \approx 3 \text{ mgon}$$

- la procédure pour alpha, beta et gamma:

$$\hat{\alpha} = \frac{p_{\alpha_D}\alpha_D + p_{\alpha_I}(200-\beta-\gamma)}{p_{\alpha_D}+p_{\alpha_I}} = 35.479 \text{ gon}$$
$$\hat{\beta} = \frac{p_{\beta_D}\beta_D + p_{\beta_I}(200-\alpha-\gamma)}{p_{\beta_D}+p_{\beta_I}} = 107.391 \text{ gon}$$
$$\hat{\gamma} = \frac{p_{\gamma_D}\gamma_D + p_{\gamma_I}(200-\alpha-\beta)}{p_{\gamma_D}+p_{\gamma_I}} = 57.130 \text{ gon}$$

$$p_D = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \sigma_0^2 = 1$$
$$p_I = \frac{1}{2 \cdot \sigma_0^2} \cdot \sigma_0^2 = 0.5$$

- on calcule les résidus

$$v_\alpha = \ell_\alpha - \hat{\alpha} = -0.008 \text{ gon}$$
$$v_\beta = \ell_\beta - \hat{\beta} = -0.008 \text{ gon}$$
$$v_\gamma = \ell_\gamma - \hat{\gamma} = -0.008 \text{ gon}$$

- on observe que
  - la répartition des résidus est uniforme
    $$v_\alpha = v_\beta = v_\gamma = -0.008 \text{ gon}$$
  - écarte de fermeture = la somme des résidus
    $$\sum v_i = -0.024 \text{ gon}$$
  - la somme des obs. compensées est 200 gon

Compensation conditionnelle

1. Formulation du problème (pourquoi)
   - On mesure souvent des quantités pour lesquelles des **relations mathématiques précises s'appliquent**. Par exemple, les valeurs réelles des angles dans un triangle satisfont toujours à la condition de fermeture.
   - Si nous mesurons ces **quantités en surplus** (p.ex. un troisième angle ou un côté supplémentaire dans un triangle, ...), les valeurs mesurées **ne satisfont pas exactement à la condition** donnée en raison des erreurs de mesure.
   - Pour éliminer les divergences constatées, nous devons les corriger. Une condition préalable à compensation est la mesure **d'au moins une quantité redondante**.

EPFL

Examples

- Physique
- Chemie
- Géometrie

Compensation conditionnelle

2. Formulation mathématique
   - On a les mesures $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ avec des poids $\overbrace{(p_1, \ldots, p_n)}^{\mathbf{P} \text{ en générale!}}$. Les valeurs vraies des quantités mesurées satisfont exactement r relations (r est le nombre de mesures *redondantes*), appelées *conditions*:

$$\begin{aligned} f_1(\check{\ell}_1, \check{\ell}_2, \ldots, \check{\ell}_n) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ f_r(\check{\ell}_1, \check{\ell}_2, \ldots, \check{\ell}_n) &= 0 \end{aligned}$$

   - Les valeurs compensées doivent remplir les mêmes conditions!

$$f_k(\hat{\ell}_1, \hat{\ell}_2, \ldots, \hat{\ell}_n) = 0 \quad k = 1, \cdots, r$$

   - Les quantités mesurées ne respectent pas ces ces relations en raison d'erreurs de mesure.

$$f_k(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n) = w_k \neq 0 \quad k = 1, \cdots, r$$

   - Les *déviations* calculées w sont appelées *les écartes de fermeture*.

- L'objectif est est d'ajoutant des *corrections* v aux valeurs mesurées que les écartes de fermetures =0 tout en minimisant la somme quadratique de v.

Compensation conditionnelle

3. Formulation mathématique – synthèse

- Mesures: $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ leurs poids $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1}$
- *Conditions*: $f_k(\ell_1 - v_1, \ell_2 - v_2, \ldots, \ell_n - v_n) = 0 \qquad k = 1, \cdots, r$
- Ecartes de fermeture: $f_k(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n) = w_k \quad k = 1, \cdots, r$
- Les *conditions* linéaires (linéarisés): $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w}$
  (dérivation en Chap. 3.2) $\mathbf{B} = \frac{\partial f(\ell)}{\partial \ell}$

Compensation conditionnelle

4. Dérivation de la méthode de calcul (Chap. 3.2)
   - Usage des coefficients de Lagrange (-$2k$) pour multiplier des conditions tout en ajoutant des éléments quadratiques:

$$\Omega = \mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} \underbrace{-2 \cdot \mathbf{k}^T}_{\Lambda \text{ dans la notation de Lagrange}} (\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{w}) \longrightarrow \text{minimum}$$

   - Dériver et mettre à zéro pour déterminer le minimum:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{v}} : \; 2 \cdot \mathbf{P}\mathbf{v} - 2 \cdot \mathbf{B}\mathbf{k} = 0$$

   - On y extraire via (3.9)

$$\mathbf{k} = \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \cdot \mathbf{w}$$

   - On obtienne la formule pour les résidus compensés:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{k}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \cdot \mathbf{w}$$

Compensation conditionnelle

5. Dérivation de la méthode de calcul (Chap. 3.2)
   - A partir des résidus compensés on peut calculer les observations compensées:

$$\hat{\ell} = \ell - \hat{\mathbf{v}}$$

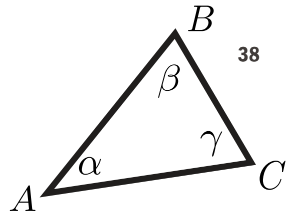
   - On contrôle le calcul et la linéarisation en introduisant des observations compensées dans les conditions d'origine (éventuellement non linéaires)

$$f_k(\hat{\ell}_1, \hat{\ell}_2, \ldots, \hat{\ell}_n) = 0 \quad k = 1, \cdots, r$$

   - ces derniers doivent être égaux à zéro (jusqu'à la précision numérique).

Application au triangle
exemple semaine 5

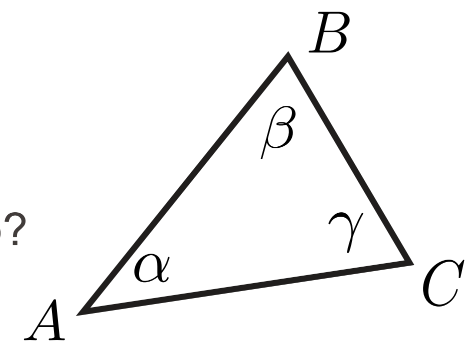
$$\ell_\alpha = 035.471\,\mathrm{gon}$$
$$\ell_\beta = 107.383\,\mathrm{gon}$$
$$\ell_\gamma = 057.122\,\mathrm{gon}$$



$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1}\cdot\mathbf{w}$$

1. Conditions (r)
2. Ecartes de fermetures (**w**)
3. Linearisation (**B**)
4. Modèle stochastique (   )
5. Calcule de corrections (   )
6. Mesures compensé (   )
7. Contrôle

Resumé 6-1 : Compensation conditionnelle



- Retour du triangle
  - Surdétermination: compenser les 3 angles d'un seul coup?
  - Modèle fonctionnel:
    - Valeurs idéales ($\check{\ell}$), réelles (ℓ + écart de fermeture **w**)
    - Pour obtenir ($\hat{\ell}$): on intrudit les résidus (**v**) + le critère des moindres carrés
  - Modèle stochastique: fait partie du critère!

- Résolution
  - Forme quadratique - extremum lié - Lagrange
  - Dérivation matricielle (taille des matrices!)
  - Réduction du système d'équations
- Résultats
  - Résidus compensés
  - Observations compensées