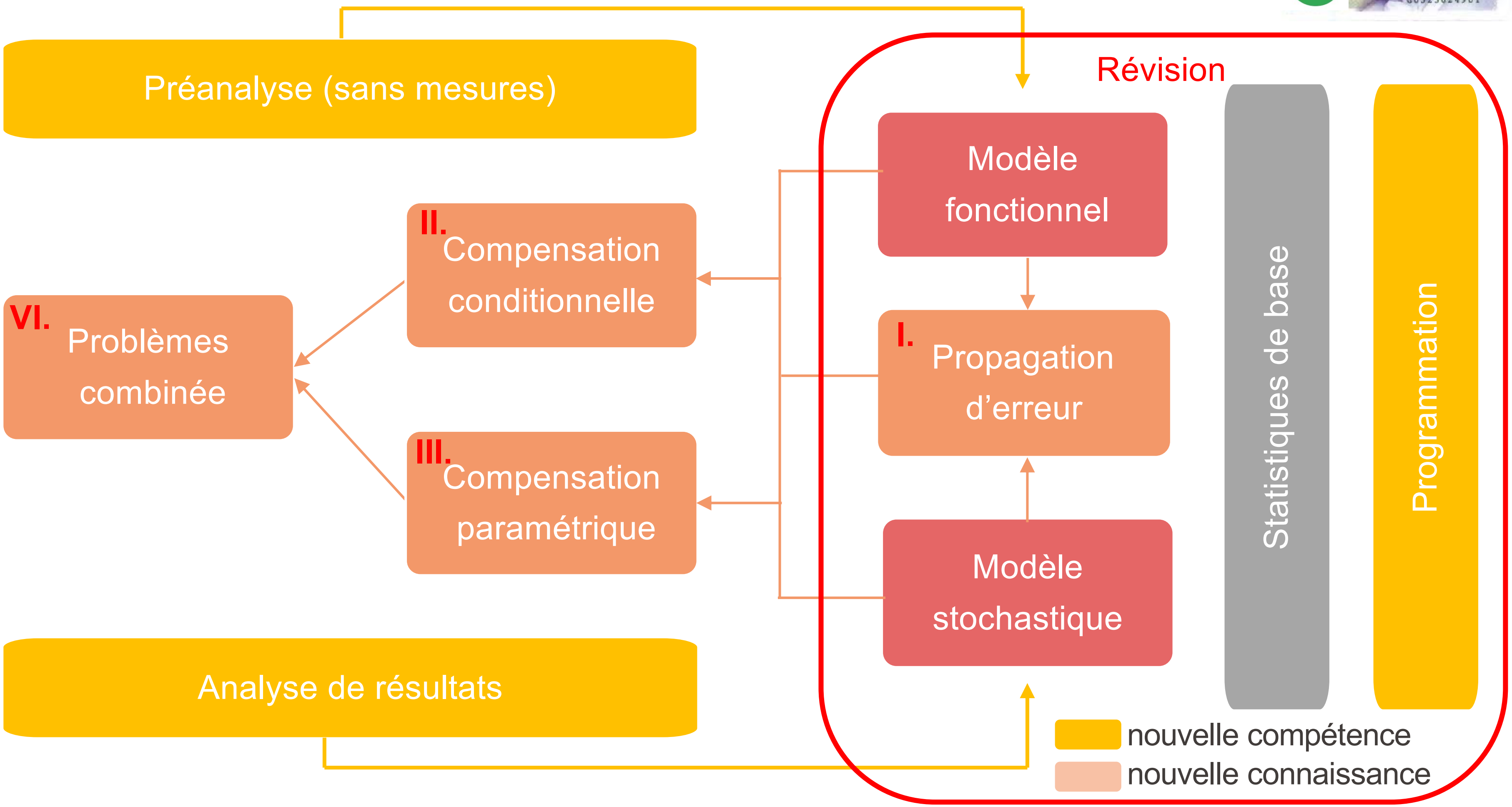
# ME Cockpit de de matières et de compétences

- Comment réussir à observer et estimer avec confiance?



# Agenda 4.1: Poids et cofacteurs


- Mesures indépendantes et de même type
  - Choix de $\sigma_0 =$ écart-type d'une observation de poids 1
  - Covariance = variance x cofacteurs : $\mathbf{K}_{\ell\ell} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\ell\ell}$
  - Poids = (cofacteurs)$^{-1}$ : $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1}$
  - Même précision : $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} = \mathbf{I}$

- Moyenne *pondérée*
  - Moyenne avec variance minimale
  - Mesures *corrélées*

- Example "au garage"
  - Plusieurs mesures de pression d'un pneu
  - Mesures corrélées et moyenne pondérée

# Poids & cofacteurs

- Principe
  - choix de sigma0

$$\mathbf{K}_{\ell\ell} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} & \sigma_{ac} \\ & \sigma_b^2 & \sigma_{bc} \\ & & \sigma_c^2 \end{bmatrix}}_{\text{même unités}} \longrightarrow \text{sort, p. ex. } \sigma_b^2 = \sigma_0$$

- Cofacteurs

$$\mathbf{Q}_{\ell\ell} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2} & \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_b^2} & \frac{\sigma_{ac}}{\sigma_b^2} \\ & \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2} & \frac{\sigma_{bc}}{\sigma_b^2} \\ & & \frac{\sigma_c^2}{\sigma_b^2} \end{bmatrix}}_{\text{sans unités}}$$

$$\mathbf{K}_{\ell\ell} \equiv \underbrace{\sigma_0^2}_{\text{p.ex. } \sigma_b^2} \; \mathbf{Q}_{\ell\ell}$$

EPFL

# Poids & cofacteurs



- Définitions $\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q}^{-1}$
  - Cas précèdent 3 x 3 $= \begin{bmatrix} p_a & p_{ab} & p_{ac} \\ & p_b & p_{bc} \\ & & p_c \end{bmatrix}$
  - Cas précèdent $(3 \times 3\,,\ \sigma_0 = \sigma_b)$ si la matrice de covariance est diagonale

$$\mathbf{Q}_{\ell\ell} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2} & & \\ & 1 & \\ & & \frac{\sigma_c^2}{\sigma_b^2} \end{bmatrix}}_{\text{sans unités}}$$

- En générale
  - Si $\sigma_{i,j} \neq 0$
  - Si les unités sont différentes
  - $\Longrightarrow \mathbf{K}_{\ell\ell}$ est difficile à interpréter, ainsi que $\mathbf{Q}_{\ell\ell}$

# Comment on peut justifier le terme de poids?
## Example: la moyenne pondérée

- On mesure deux fois une grandeur
  1. $a$ avec $\sigma_a$
  2. $b$ avec $\sigma_b$
  - $a,\ b$ sont indépendants $\Longrightarrow \quad \rho_{ab} = 0$

- On propose
  - $\boxed{m = p_a\, a + p_b\, b \quad \text{avec} \quad p_a + p_b = 1}$

$$m = \begin{bmatrix} p_a & p_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\sigma_m^2 = ?$$

## Moyenne pondérée avec variance minimale



$$m = \begin{bmatrix} p_a & p_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\sigma_m^2 =$$

$$\sigma_m^2 =$$

$$p_a + p_b = 1$$

$$\Longrightarrow p_b =$$

- Comment choisir $\sigma_m^2$ ?
- But: $\sigma_m^2 \longrightarrow$ variance minimale

# Moyenne pondérée avec variance minimale (suite)

$$\sigma_m^2 = p_a^2 \sigma_a^2 + (1 - p_a)^2 \; \sigma_b^2$$

$$\sigma_m^2 =$$

$$\sigma_m^2 =$$

- Minimum de fonction $\frac{\partial f(\cdot)}{\partial} = 0$

$$\frac{\partial f(\sigma_m^2)}{\partial p_a} :$$

$$\longrightarrow \; p_a =$$

# Moyenne pondérée avec variance minimale (suite)



- A noter que $\boxed{p_a\,\sigma_a^2 = p_b\,\sigma_b^2 = 1 \cdot \sigma_0^2}$

$$\Longrightarrow p_b = \frac{\cancel{\sigma_b^2} \cdot \sigma_a^2}{\left(\sigma_a^2 + \sigma_b^2\right)\cancel{\sigma_b^2}} \quad \Longrightarrow \boxed{p_b = \frac{\sigma_a^2}{\left(\sigma_a^2 + \sigma_b^2\right)}}$$

- Conclusion sur la moyenne pondérée
  - On pondère les observations indépendantes par l'inverse de leur variance

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

# Moyenne pondérée «étendu» (suite)

- Dérivation par la méthode de Lagrange

$$\sigma_m^2 = \underbrace{\begin{bmatrix} p_a & p_b \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_a \\ p_b \end{bmatrix} + \text{condition: } p_a + p_b = 1$$

- Forme quadratique $\Omega \ : \ \underbrace{p_a^2\sigma_a^2 + p_b^2\sigma_b^2}_{\text{comme avant}} - \underbrace{2k}_{\Lambda} \underbrace{(p_a + p_b - 1)}_{\text{condition}} \Rightarrow min$

$$(1) \quad \frac{\partial\Omega}{\partial p_a} = 0 \ : \ \ldots \quad \Longrightarrow p_a = \frac{k}{\sigma_a^2} \Longrightarrow \hat{p}_a = \ldots$$

$$(2) \quad \frac{\partial\Omega}{\partial p_b} = 0 \ : \ \ldots \quad \Longrightarrow p_b = \frac{k}{\sigma_b^2} \Longrightarrow \hat{p}_b = \ldots$$

$$(3) \quad \frac{\partial\Omega}{\partial k} = 0 \ : \ \ldots \quad \Longrightarrow p_a = (1 - p_b) \Longrightarrow (1) \Longrightarrow k = (1 - p_b)\sigma_a^2 \Longrightarrow (2)$$

$$\Longrightarrow p_b = (1 - p_a) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow k = (1 - p_a)\sigma_b^2 \Longrightarrow (1)$$

**Résultat comme avant !**

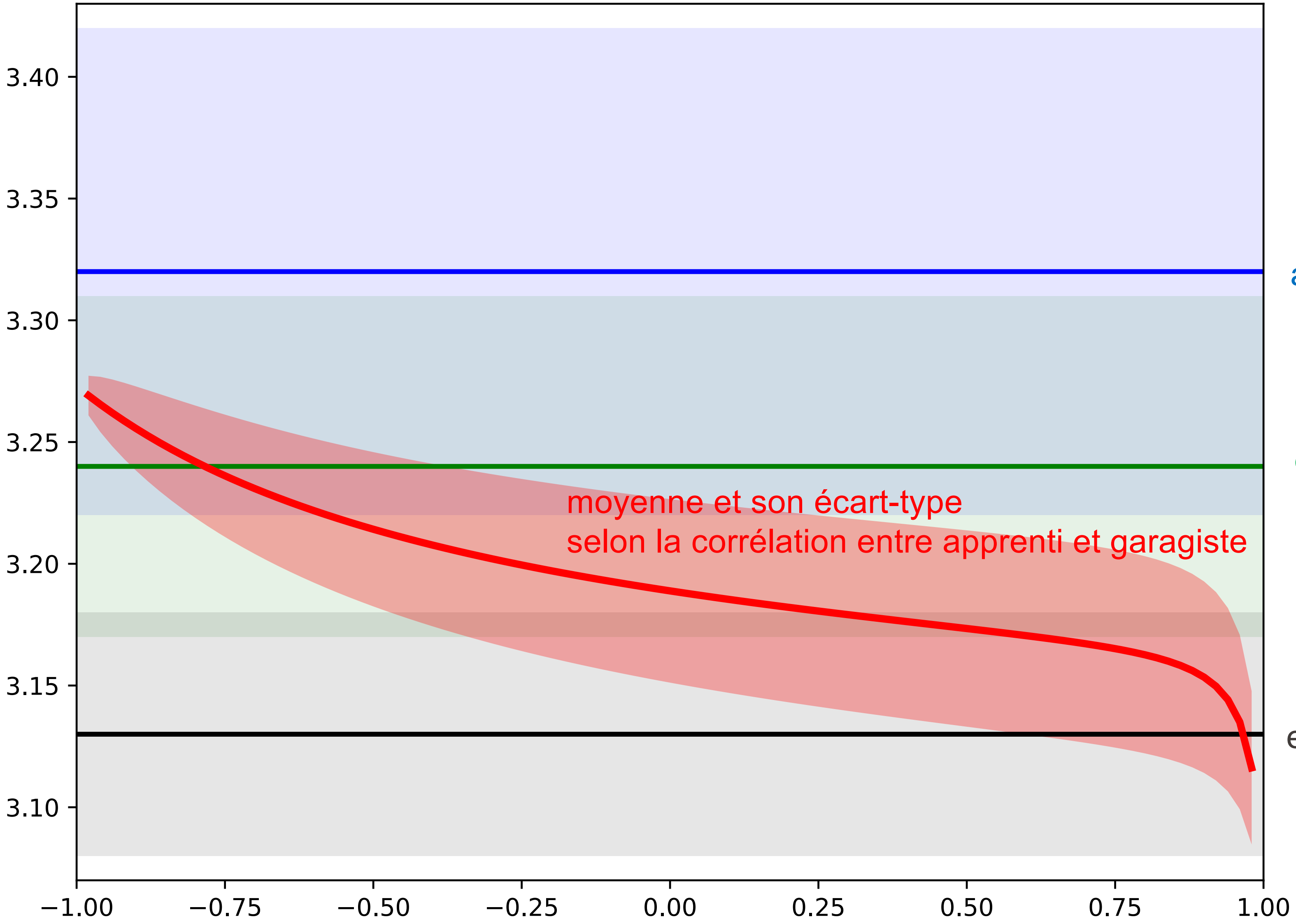
# Moyenne pondérée
## Complément

- Sur Moodle (les preuves)
  1. Les poids de la moyenne pondérée est égal à la somme de poids de ses composants
  2. La somme des poids est-elle toujours égale à 1?
  3. Indépendance à sigma0

# Exemple


- Example « au garage »
  - Plusieurs mesures de pression d'un pneu
    1. Apprenti $\ell_a$ avec $\sigma_a = 0.1$ bar
    2. Garagiste $\ell_g$ avec $\sigma_g = 0.07$ bar
    3. Experte $\ell_e$ avec $\sigma_e = 0.07$ bar
  - Mesures indépendantes: au tableau
  - Mesures <u>corrélées et moyenne pondérée</u>: démo en Python
  - Intuition et calcul
    - *Influence des mesures corrélées*: gain ou perte?
    - Corrélations modérées et extrêmes

# Weighted mean and its standard deviation [area] vs correlation ab




# Poids et cofacteurs – synthèse



credit: wiki

- Mesures indépendantes et de même type
  - Choix de $\sigma_0 =$ écart-type d'une observation de poids 1
  - Covariance = variance x cofacteurs : $\mathbf{K}_{\ell\ell} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\ell\ell}$
  - Poids = (cofacteurs)$^{-1}$ $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1}$
  - Même précision : $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} = \mathbf{I}$
- Moyenne *pondérée*
  - Moyenne avec variance minimale
  - Poids de la moyenne = somme de poids !
  - Mesures *corrélées*
    - Généralisation des poids
    - Interprétation plus difficile des éléments
  - Mesures de types *différents*
    - Facteur de multiplication commun
    - Choix des unités – défis (problèmes) numériques

**Pour jeudi prochain : exorcises résolue et non-résolus du chapitre 2, questions!**

**Pour mardi prochain : préparer 1 feuil “triche” A4 - Chapitres 1 & 2**

# Moyenne pondérée avec variance minimale

$$m = \overbrace{\begin{bmatrix} p_a & p_b \end{bmatrix}}^{F} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\sigma_m^2 = \begin{bmatrix} p_a & p_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \cdot \\ \cdot & \sigma_b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_a \\ p_b \end{bmatrix}$$

$$\sigma_m^2 = \begin{bmatrix} p_a \sigma_a^2 + p_b \sigma_b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_a \\ p_b \end{bmatrix}$$

$$= p_a^2 \sigma_a^2 + p_b^2 \sigma_b^2 = p_a^2 \sigma_a^2 + (1 - p_a)^2 \sigma_b^2$$

$$p_a + p_b = 1$$

$$\Longrightarrow p_b = 1 - p_a$$

- Comment choisir $\sigma_m^2$ ?
- But: $\sigma_m^2 \longrightarrow$ variance minimale

# Moyenne pondérée avec variance minimale (suite)

$$\sigma_m^2 = p_a^2\sigma_a^2 + (1-p_a)^2\ \sigma_b^2$$

$$\sigma_m^2 = p_a^2\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2p_a\sigma_b^2 + p_a^2\sigma_b^2$$

$$\sigma_m^2 = p_a^2(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) - 2p_a\sigma_b^2 + \sigma_b^2$$

- Minimum de fonction $\frac{\partial f(\cdot)}{\partial} = 0$

$$\frac{\partial f(\sigma_m^2)}{\partial p_a} : \cancel{2}p_a(\sigma_a^2 + \sigma_b^2) - \cancel{2}\sigma_b^2 = 0$$

$$\longrightarrow p_a = \frac{\sigma_b^2}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

# Moyenne pondérée avec variance minimale (suite)



- A noter que $\boxed{p_a\,\sigma_a^2 = p_b\,\sigma_b^2 = 1 \cdot \sigma_0^2}$

$$\Longrightarrow\ p_b = \frac{\cancel{\sigma_b^2}\cdot\sigma_a^2}{(\sigma_a^2+\sigma_b^2)\,\cancel{\sigma_b^2}} \qquad \Longrightarrow\ \boxed{p_b = \frac{\sigma_a^2}{(\sigma_a^2+\sigma_b^2)}}$$

- Conclusion sur la moyenne pondérée
  - On pondère les observations indépendantes par l'inverse de leur variance

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$