

- Définition

$$\delta y = \mathbf{F} \cdot \delta \ell \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{K}_{yy} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K}_{\ell\ell} \cdot \mathbf{F}^T$$

- Justification: additon de deux variables normales

- Observations indépendantes (démonstration)
- Observations corrélées (démonstration – animation)
- Linéarisation – analytique (rappel) et numérique

- Expression matricielle

- Pour une multiplication
- Pour une combinaison
- Générale



*On tient compte des corrélations à l'entrée et l'on obtient les corrélations à la sortie !*

# On justifie de propagation d'erreur...

$$\mathbf{K}_{yy} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K}_{\ell\ell} \cdot \mathbf{F}^T$$

- Exemple de jeudi:  $c = a + b$

$$dc = \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \phantom{\delta a} \\ \phantom{\delta b} \end{array} \right]}_{\mathbf{F}} \left[ \begin{array}{c} \delta a \\ \delta b \end{array} \right]$$

$$\sigma_c^2 = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} \right] = \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \phantom{\delta a} \\ \phantom{\delta b} \end{array} \right]}_{\mathbf{K}_{\ell\ell}} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right]$$

$$\sigma_c^2 =$$

- Cas:  $\sigma_a = \sigma_b = \sigma_0$
- Rappelle:

# Démo de propagation d'erreur...

$$\mathbf{K}_{yy} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K}_{\ell\ell} \cdot \mathbf{F}^T$$

		Théoretique	Empirique	
■ corrélation	$\rho_{ab}$	$\sigma_c$	$\hat{\sigma}_c$	$c = a + b$
100%				
50%				
0%				
-50%				
-100%				

$$\sigma_c^2 = 2\sigma_0^2 (1 + \rho_{ab})$$

Propagation d'erreur ...	... vraie Analyse de sensibilité	... maximale Calcul de tolérance	... moyenne ou quadratique Propagation de variance
modèle fonctionnel $y = f(\ell)$	$F = \frac{\partial f(\ell)}{\partial \ell}$	$F$	$F$
modèle stochastique	? $y$ en pas !	$\varepsilon_i = k \cdot \sigma$ $2 \leq k \leq 3$	$\sigma_i$ ,
loi	$\delta y = F \cdot \partial \ell$	$\varepsilon_y =  F  \varepsilon_\ell$	$K_{yy} =$
cas particuliers	$\delta_{a+b} = \partial a + \partial b$ $\delta_{a-b} = \dots$	+ ou - : $\Sigma$ err. absolue $\varepsilon_{a \pm b} = \varepsilon_a + \varepsilon_b$	$\sigma_{a+b}^2 = \sigma_a^2 + 2\sigma_{ab} + \sigma_b^2$
opérations de base	$\frac{\delta_{a \cdot b}}{a \cdot b} = \frac{\partial a}{a} + \frac{\partial b}{b}$ $\delta_{a/b} = \dots$	$\times$ ou $\div$ : $\Sigma$ err. relative $\frac{\varepsilon_{ab}}{ a \cdot b } = \frac{\varepsilon_a}{ a } + \frac{\varepsilon_b}{ b }$	
propriétés	Si $\ell$ change de tant, $y$ change de tant, et .. <i>basta</i> !	cumul pessimiste + ou $\times$ : $\rho = +1$ - ou $\div$ : $\rho = -1$	On considère les corrélations dans $\ell$ . On obtient les corrélations dans $y$ .
notamment		⚠	

# Linéarisation

## ■ Status d'une variable

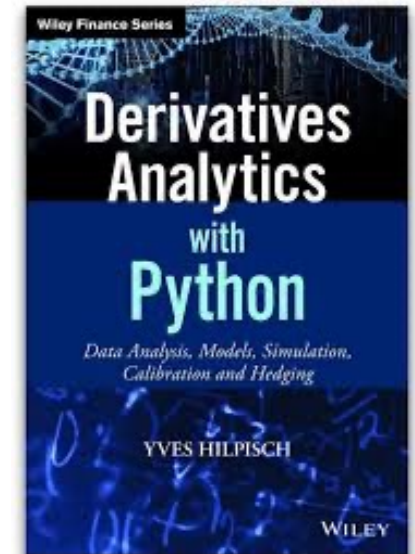
- Valeur mesurée, vrais, estimée, moyenne, approchée

- Notation :  $l, \check{l}, \hat{l}, \bar{l}, \overset{\circ}{l}$

$l$	—	mesure	$\hat{l}$	—	estimé
$\check{l}$	—	vrais	$\overset{\circ}{l}$	—	approximé

## ■ Différentiation

- Différentiation analytique: ✓
- Différentiation numérique ↔ définition de la dérivée



# Linéarisation numérique

- Usage de définition

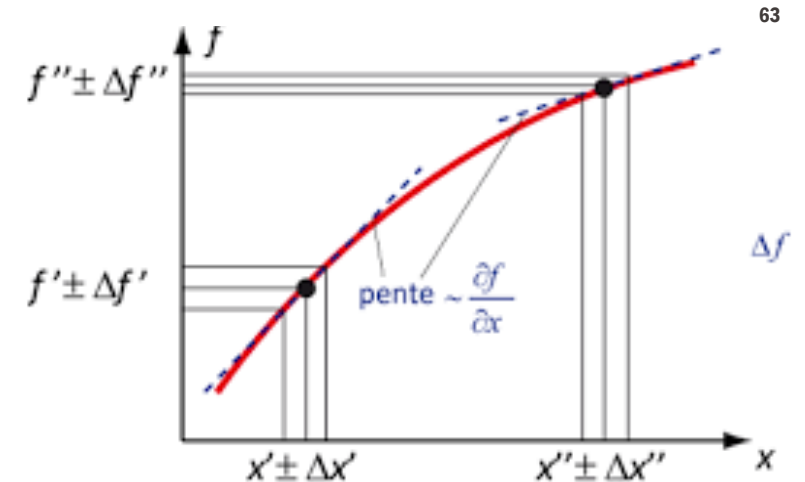
$$f'(\dot{x}) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(\dot{x} + \delta x) - f(\dot{x})}{\delta x}$$

- Exemples

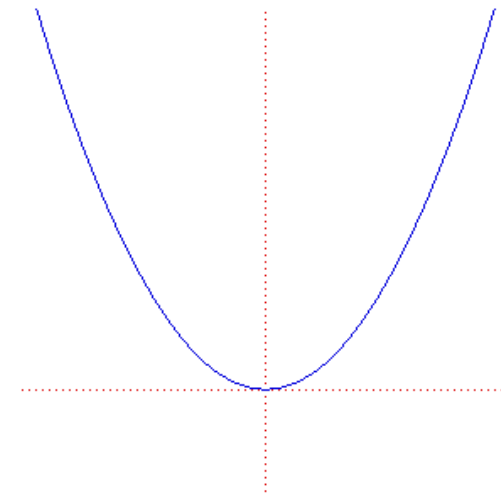
- $f(l) = 3l, \quad \dot{l} = 2$

- $f(l) = l^2, \quad \dot{l} = 3$

- $f(l) = \ln(l), \quad \dot{l} = 0.5$



Parabola



# Linéarisation cas particuliers 1



## ▪ $\log_{10}(x)$

- attention aux différences de définition lors du calcul du logarithme

- la **calculatrice** :  $\log(x)$  → sur base de 10  
:  $\ln(x)$  → logarithme *naturel*
- l'ordinateur :  $\log(x)$  → logarithme *naturel*  
:  $\log_{10}(x)$  → sur base de 10



- Dérivé numérique: inchangé (appeler les fonctions respectives)
- Dérivé analytique - langage **calculatrice**:

$$\log(x) = \log(e^{\ln x}) = \log e \cdot \ln x \quad \bullet \quad \text{ou} \quad \log'(x) = \left( \frac{\log_e x}{\log_e 10} \right)'$$

$$\frac{\partial \log(x)}{\partial x} = \log'(x) = \log e \cdot \frac{1}{x} \quad = \left( \frac{\ln x}{\ln 10} \right)' = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x}$$

# Linéarisation cas particulier 2



- $\sin(x)$  p.ex. pour  $x=60$  [deg]

- Dérivé numérique (inchangé)



$$\frac{\partial \sin(60)}{\partial [deg]} = \frac{\sin(60.01) - \sin(60)}{0.01}$$

Attention: pour l'**ordinateur** il faut donner  
l'argument  $\sin([radians])$   
 $\cos([radians])$

- Dérivé analytique

- Attention! Dérivation analytique des fonctions trigonométrique suppose l'usage des radians (p.ex. dérivé de  $\sin(\alpha)$  n'est correct que pour  $(\delta\alpha)$  en radians!)



$$\frac{\partial \sin(60)}{\partial [deg]} = \cos(60) [rad] \cdot \frac{\partial [rad]}{\partial [deg]} = 0.5 [rad] \cdot \frac{\pi}{180}$$

Remarque : La conversion  $\varepsilon$  ou de  $\sigma$  en radians fonctionnerait, mais i) elle serait moins intuitive

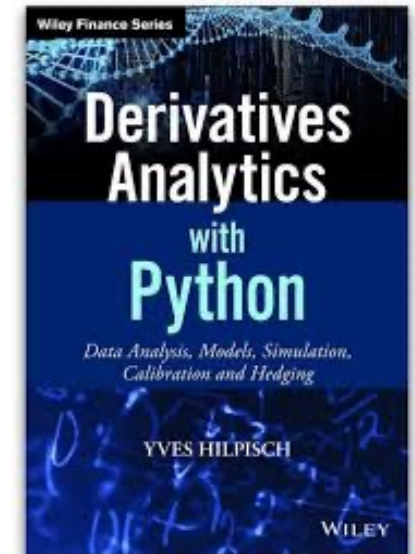
ii) elle entraînerait de grandes différences dans les éléments de F (ce qui pourrait poser des problèmes numériques par la suite).

# Linéarisation – synthèse

- Status d'une variable
  - Valeur mesurée, vrais, estimée, moyenne, approchée
  - Notation :

$$l, \check{l}, \hat{l}, \bar{l}, \overset{\circ}{l}$$

- Choix de la méthode
  - Différentiation analytique: ✓
  - Différentiation numérique ↔ définition de la dérivée
    - Fonction linéaire
    - Parabole et logarithme naturel
    - Fonction quelconque
  - Cas particuliers  $\log_{10}(x)$  et  $\sin(\alpha [\text{deg}])$  – voir les transparents séparés
  - Variance inchangée



⇒ On peut calculer la dérivée d'une fonction sans dériver la fonction!