EPFL

Agenda 2.1

- Observations en 1D
  - Coefficient de multiplication (tolérance) = Risk et sa probabilité
  - Effet de corrélation entre les mesures
  - Erreur I. et II.

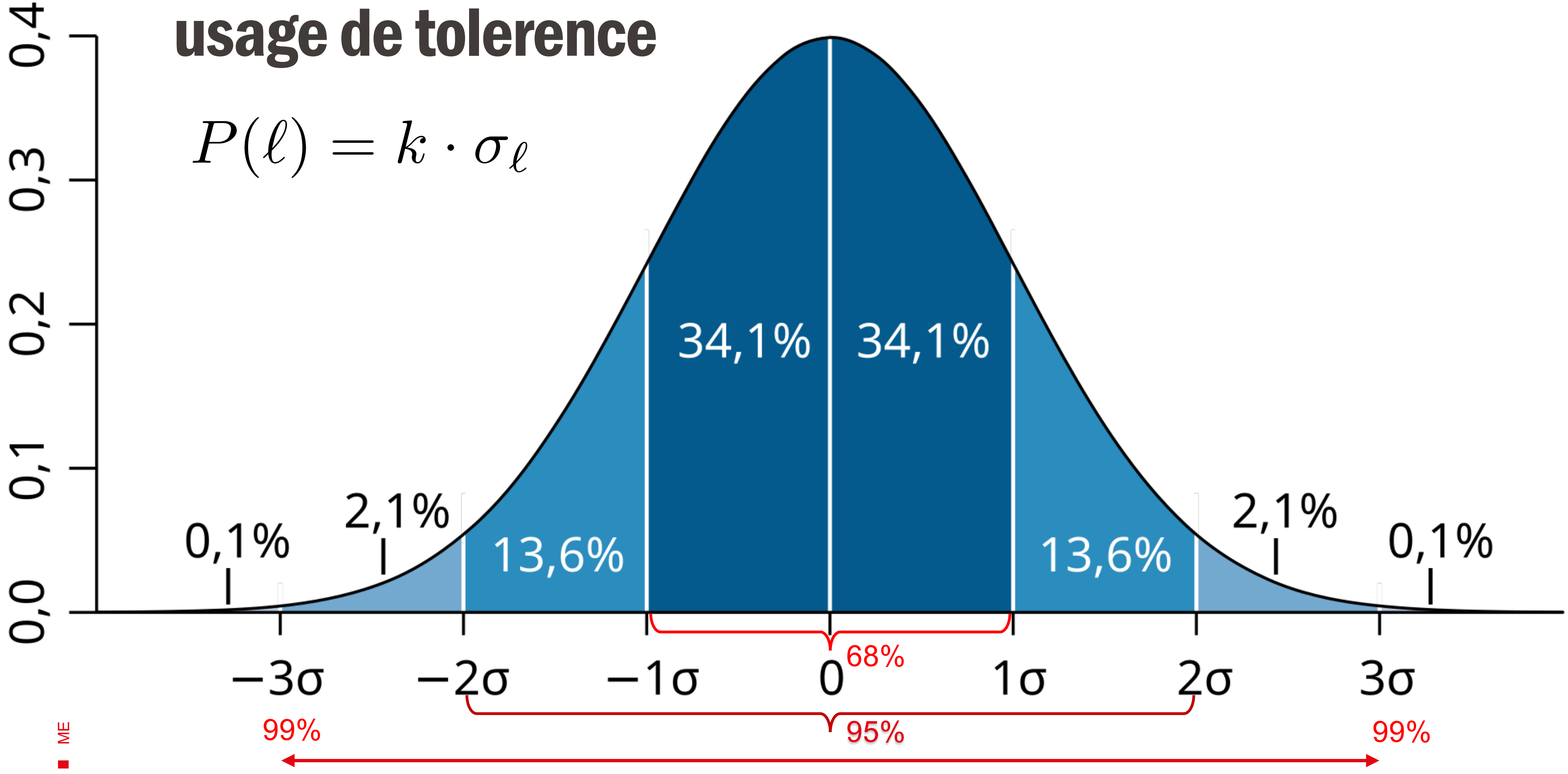
- Observations en 2D
  - Formes de (in)dépendance
  - Extrêmes de variations et coefficients de multiplication
  - Terminologie d'erreur

- Observations en 3D
  - Formation de K et R

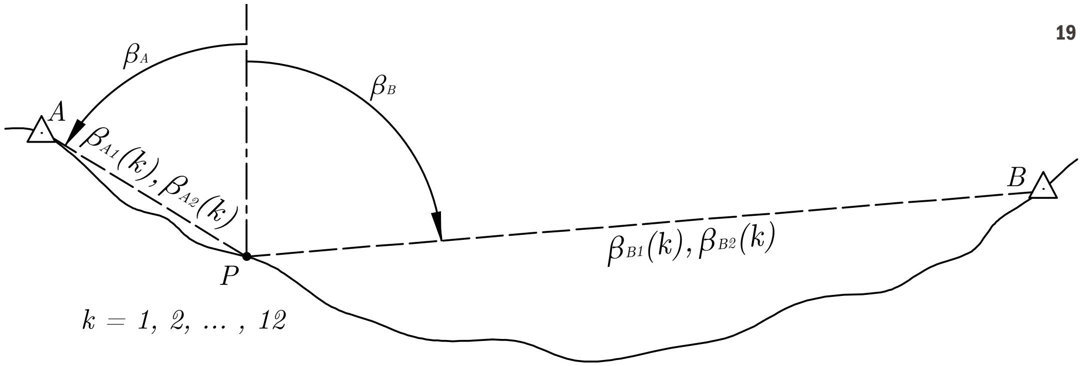
EPFL

Erreur maximale usage de tolerence

$$P(\ell) = k \cdot \sigma_\ell$$

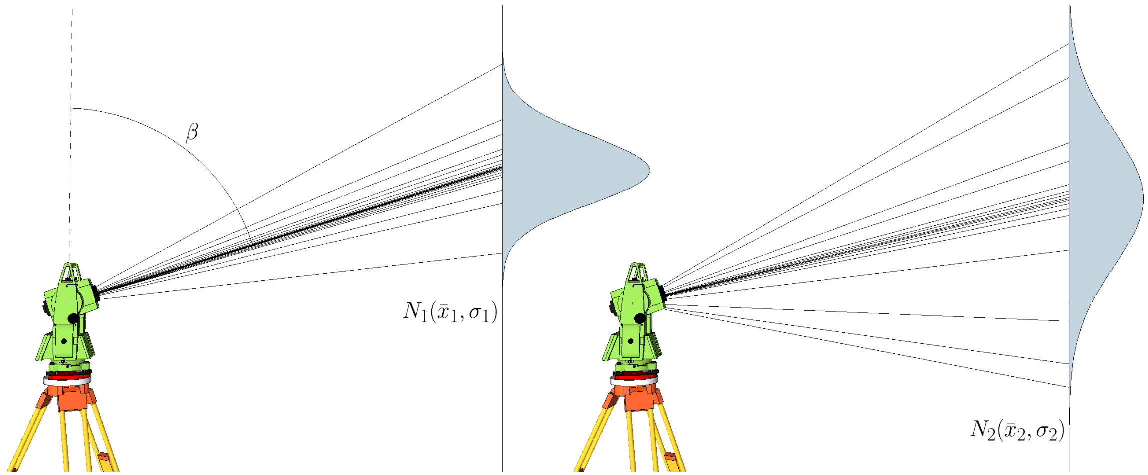


Exemple de « précision » Fig. 1.2-3



- Nivellement (détermination de hauteur) trigonométrique avec des effets:

  1. corrélation dans le temps
  2. corrélation dans l'espace (distance)

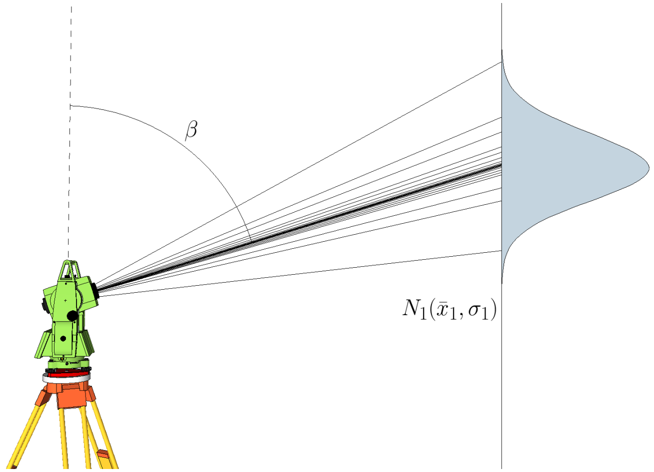


- Seul appareil
- Un court laps de temps

- Plusieurs appareils
- Conditions variables

EPFL

Test de l'écarte type empirique



- S'agit-il d'un échantillon aléatoire tiré de la population de base avec $\sigma = 30''$?

- On a besoin quoi?

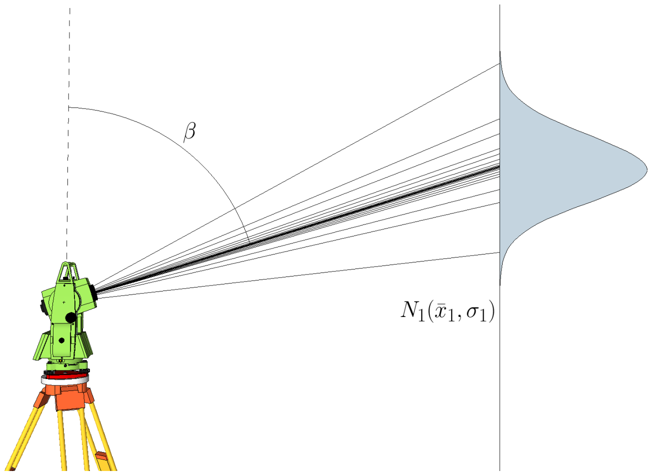
Précision nominale d'appareil
(en seconde d'arc) $\sigma = 30''$

Précision empirique pour $n = 25$
(en seconde d'arc) $\hat{\sigma} = 41''$

ME

Test de l'écarte type empirique

- Test bilatéral de l'hypothèse, $H_0 \ : \sigma = 30$
- contre l'hypothèse alternative, $H_1 \ : \sigma \neq 30$
- aux niveaux de signification $\alpha = 0.05$

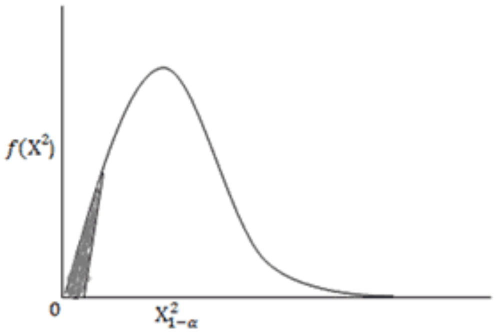


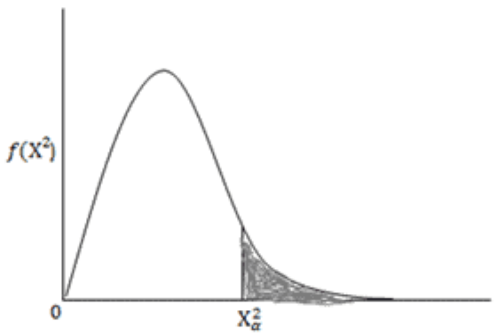
Précision nominale d'appareil
(en seconde d'arc) $\sigma = 30''$

Précision empirique pour $n = 25$
(en seconde d'arc) $\hat{\sigma} = 41''$

- Dans le test bilatéral on rejet H_0 si

$$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2} \quad \text{ou} \quad \chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}$$





Test de l'écarte type empirique

- Dans le test bilatéral on rejet H_0 si

$$\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2} \quad \text{ou} \quad \chi^2 > \chi^2_{\alpha/2}$$

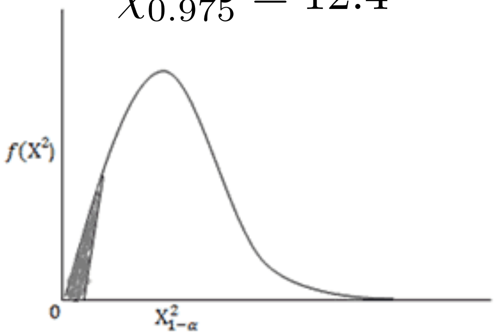
- valeur du critère de test

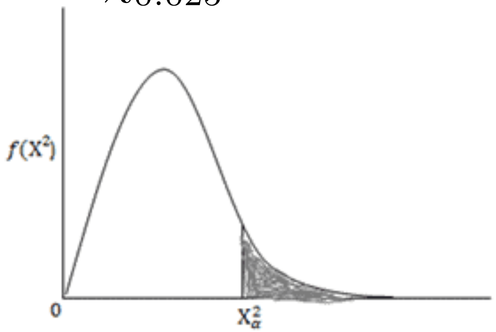
$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot \hat{\sigma}^2$$

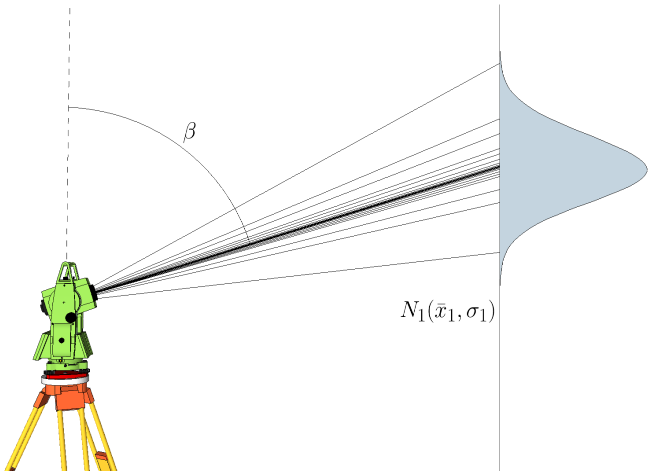
$$\chi^2 = \frac{24}{900} \cdot 1681 = 44.8$$

- à partir du tableau χ^2 pour $n = 24$

$$\chi^2_{0.975} = 12.4 \qquad \chi^2_{0.025} = 39.4$$



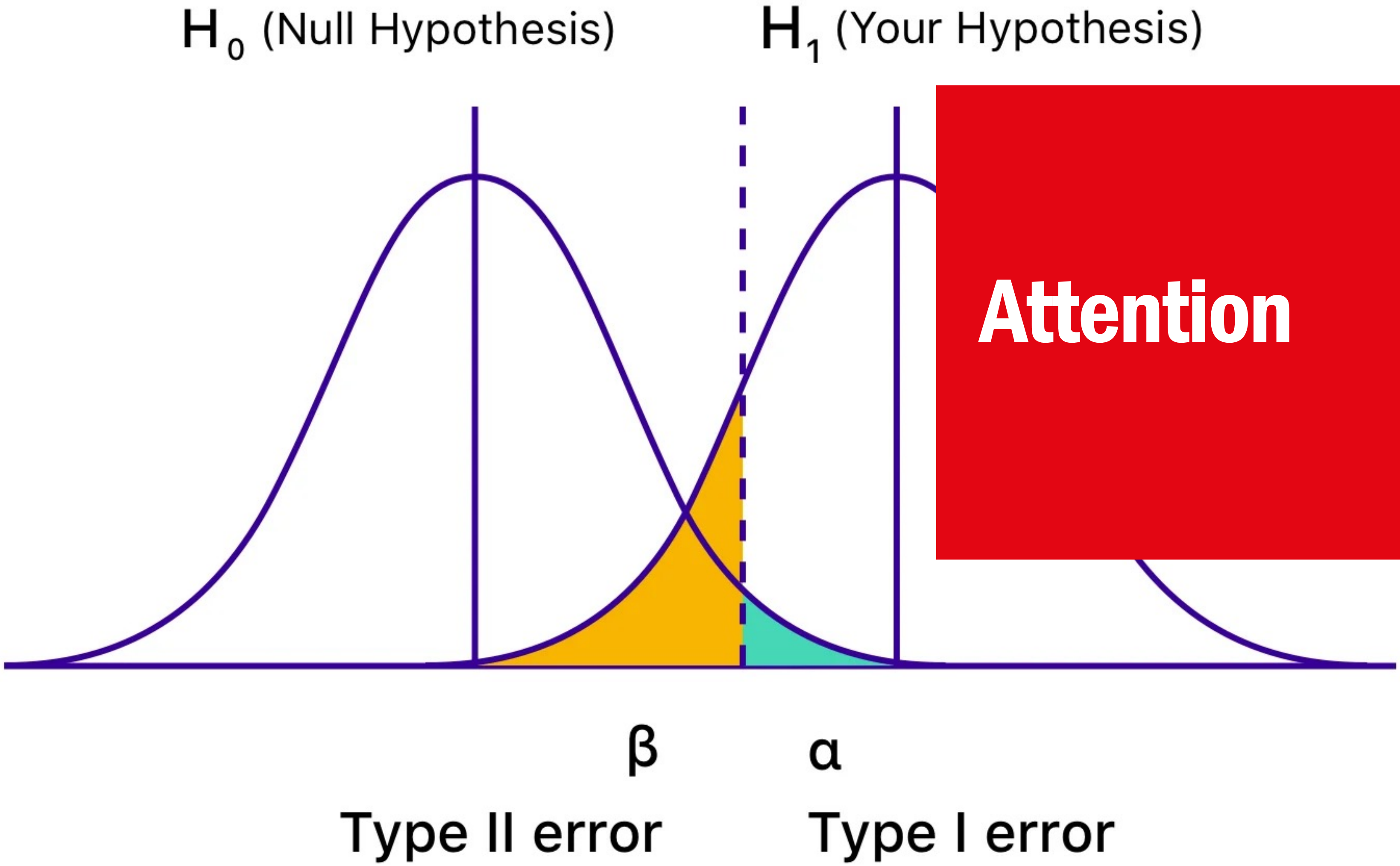




Précision nominale d'appareil
(en seconde d'arc) $\sigma = 30''$

Précision empirique pour $n = 25$
(en seconde d'arc) $\hat{\sigma} = 41''$

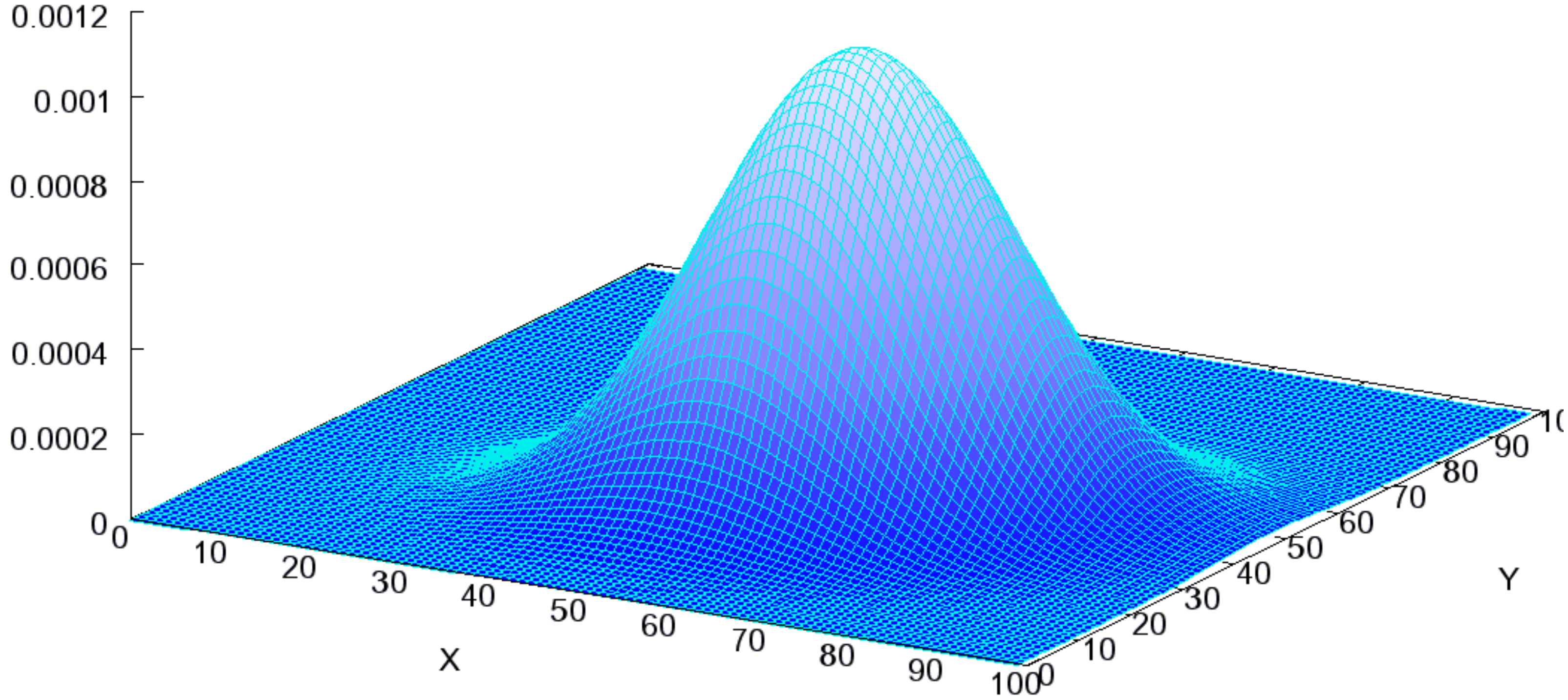
➔ ?



credit: wiki

Attention

Distribution Gaussian 2D



credit: wiki

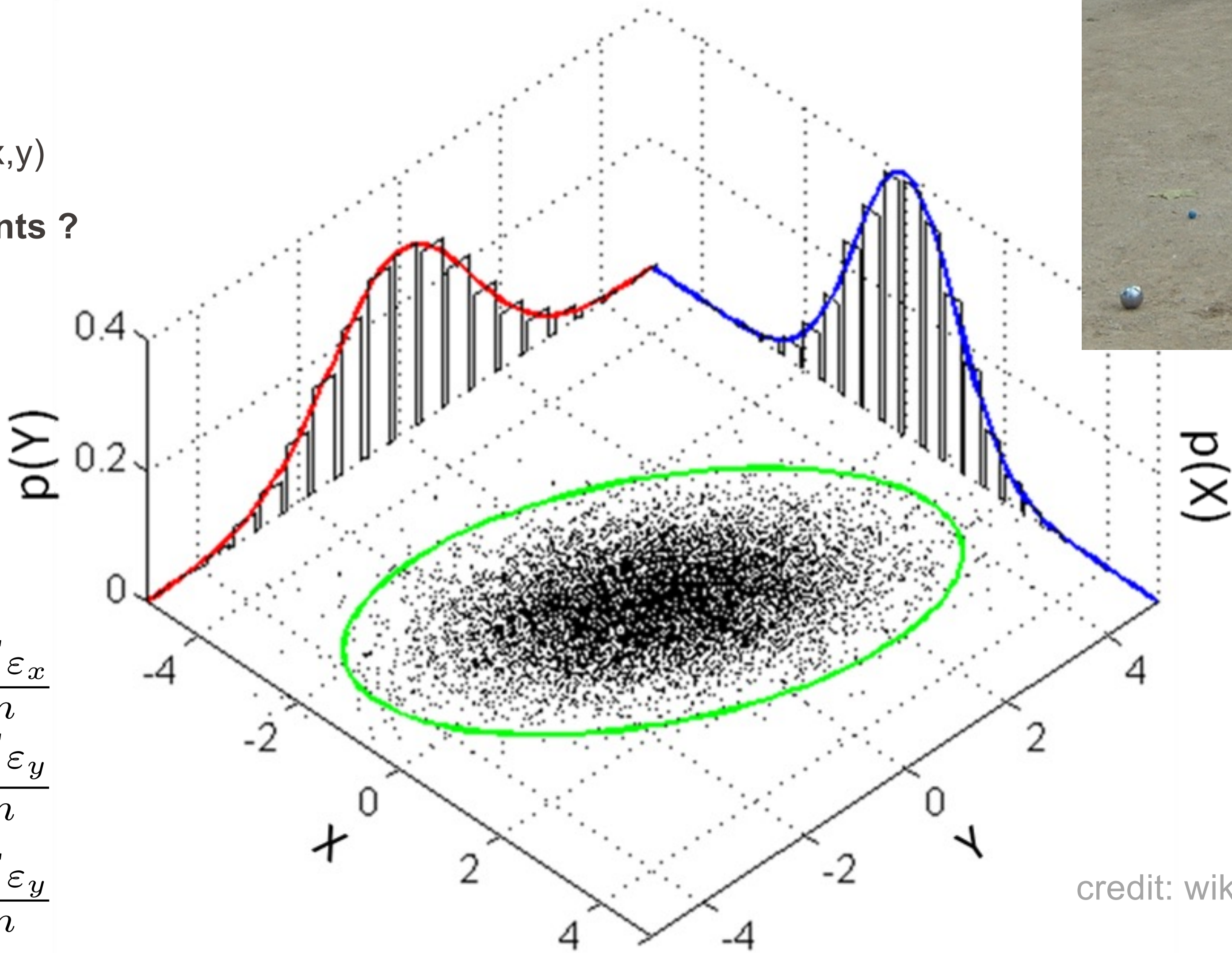
2 variables (x,y) indépéndants

EPFL

Distribution Gaussian 2D

2 variables (x,y)

- indépéndants ?



credit: wiki

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x,x} = \frac{\varepsilon_x^T \varepsilon_x}{n}$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y,y} = \frac{\varepsilon_y^T \varepsilon_y}{n}$$

$$\sigma_{x,y} = \frac{\varepsilon_x^T \varepsilon_y}{n}$$

ME

Distribution Gaussian 2D

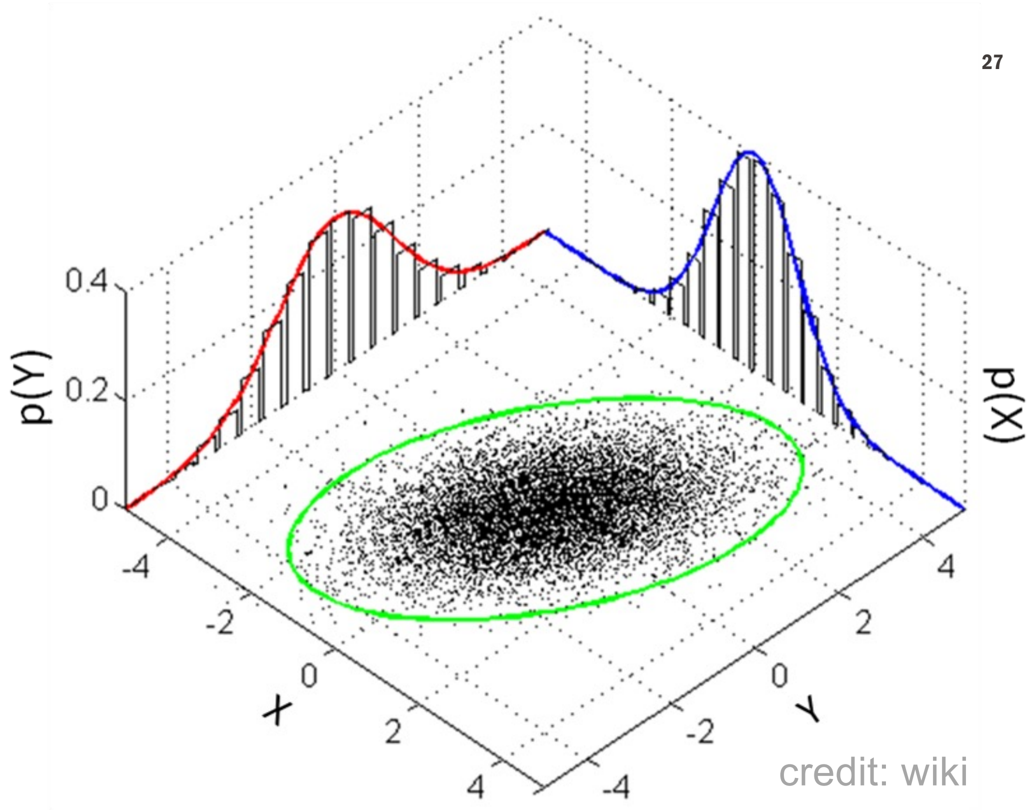
2 variables (x,y)

Indépéndants ?

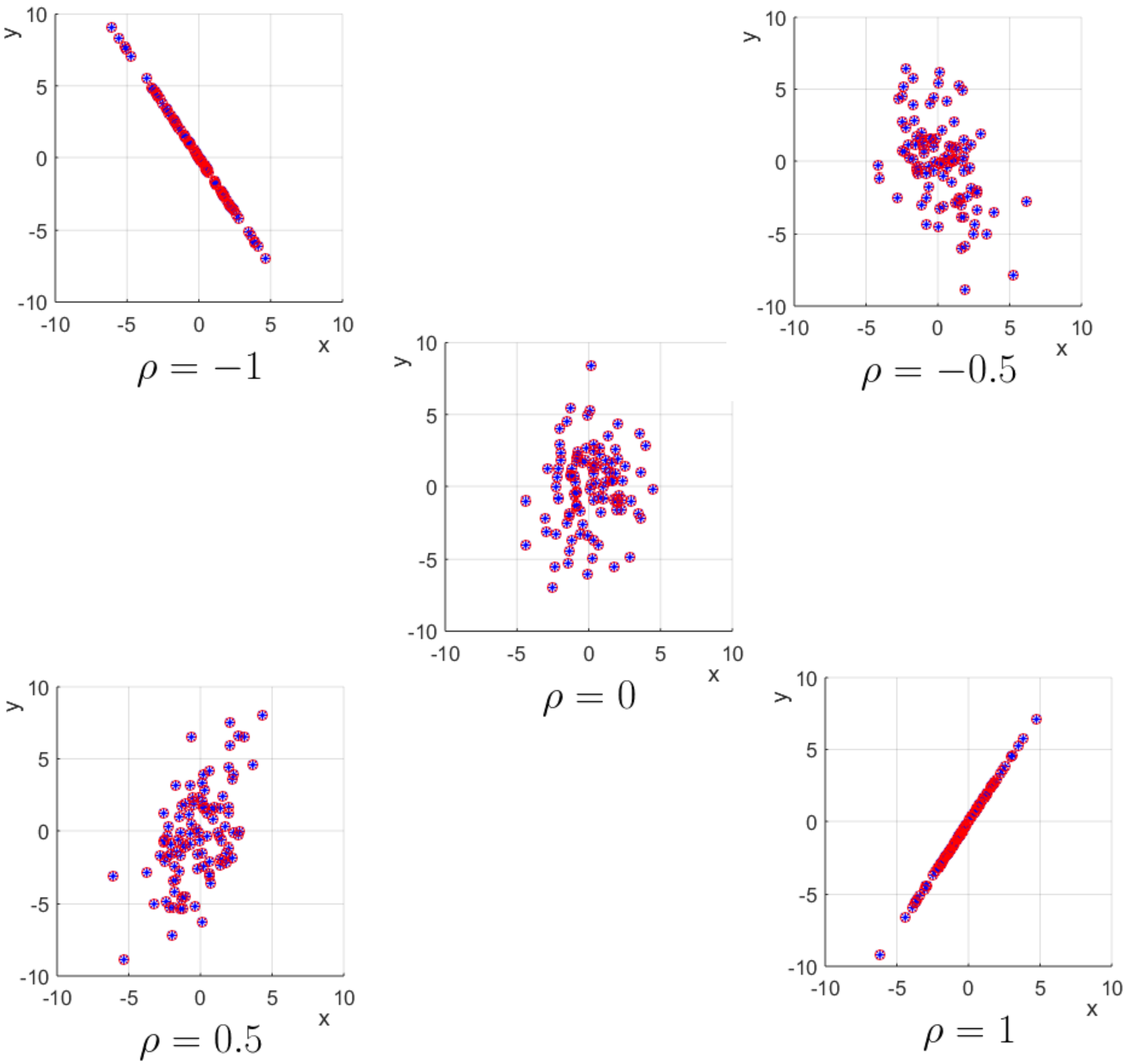
- **non, si** $\sigma_{x,y} = \frac{\varepsilon_x^T \varepsilon_y}{n} \neq 0$

$$\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \neq 0$$

Attention !!! $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\sigma_{xx}}$



Distribution 2D corrélée, Fig. 1.1



Observations corrélées

- Simulation 2D
  - Ellipses d’erreur et de confiance
  - Valeurs de référence

r = redondance ou degrés de liberté (= f)

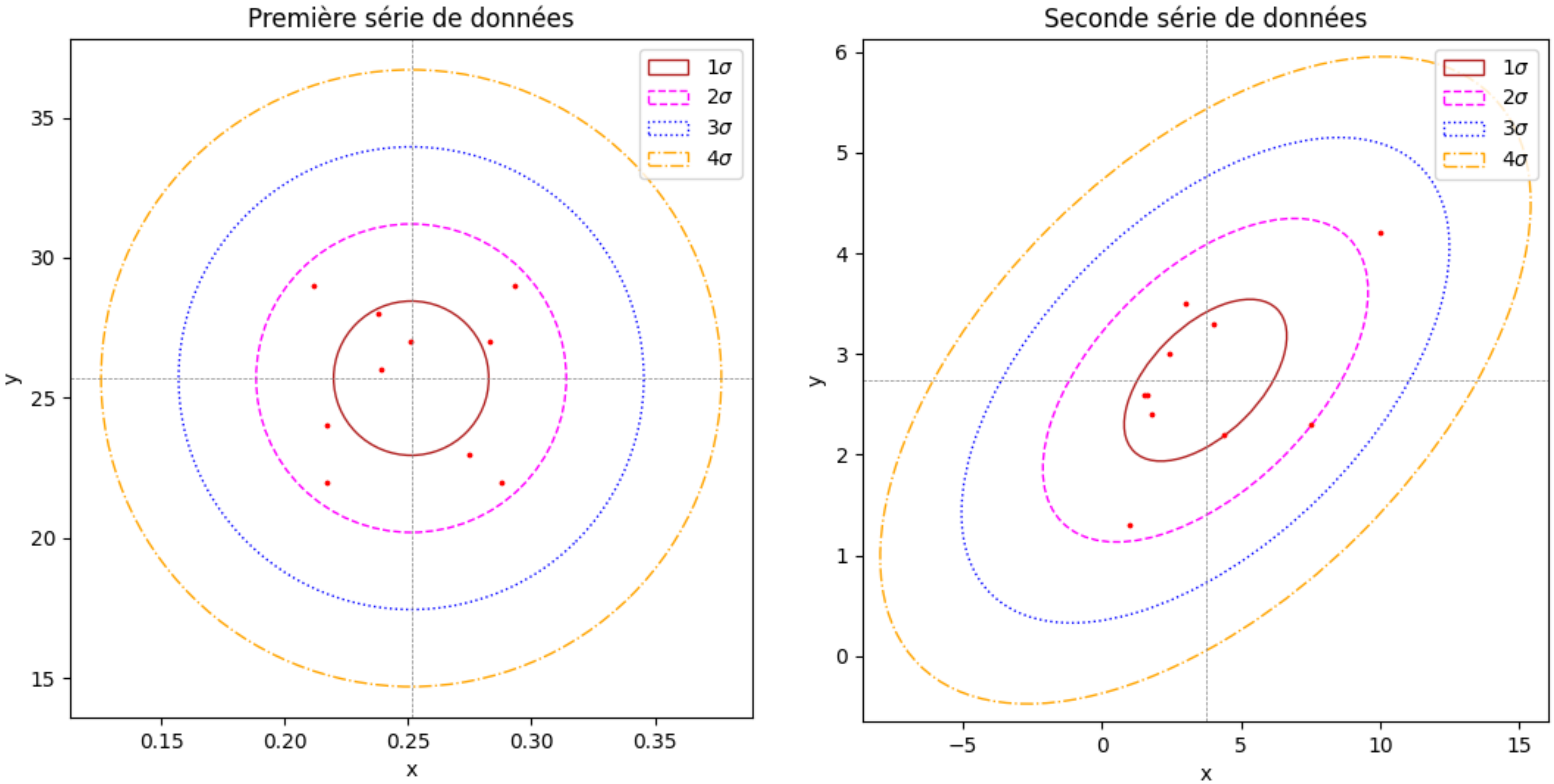
k = multiplicateur de l'ellipse d'erreur moyenne (1σ)

p = probabilité d'être à l'intérieur

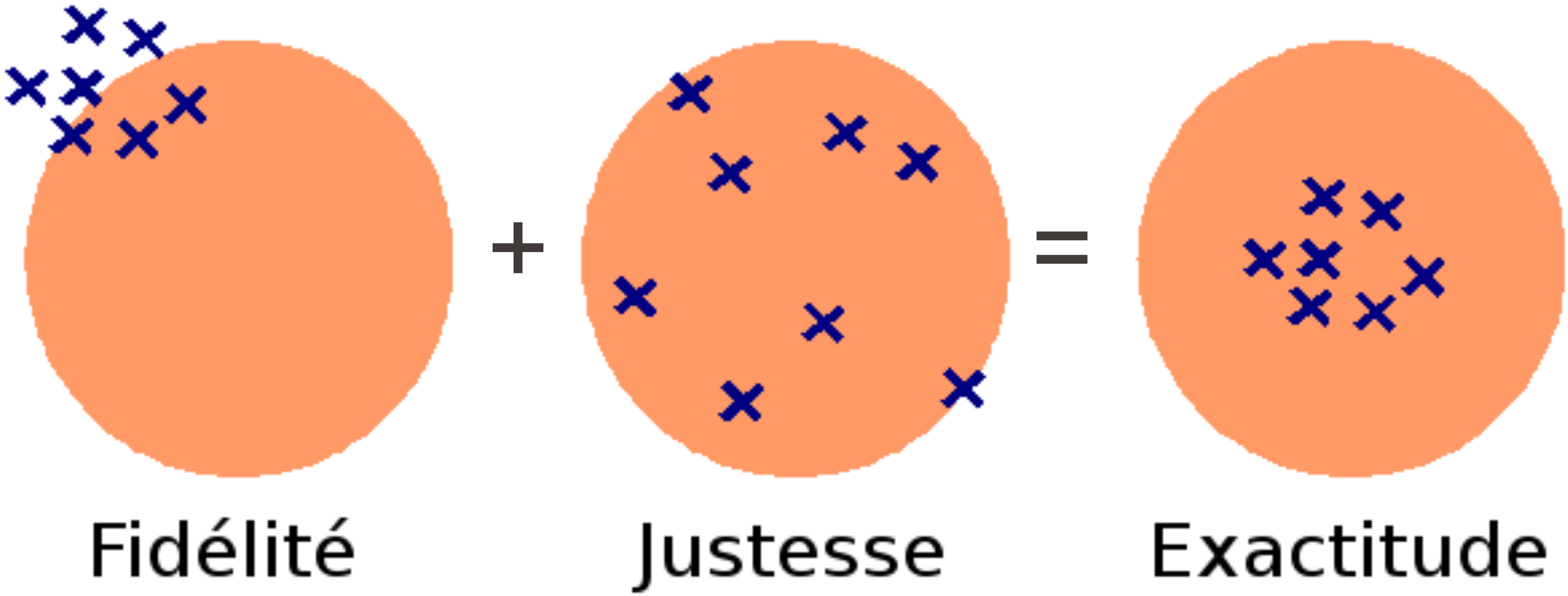
r	k	p
∞	1	39.35%
∞	2	86.47%
∞	2.45	95%
∞	3.03	99%
10	2.9	95%
5	3.4	95%
2	6.1	95%
10	3.9	99%
5	5.2	99%
2	14	99%

Distribution Gaussian 2D – examples

Extremes de variation – Fig 1.9
Equations (1.1) – (1.3)



ME 1-15: Terminologie ISO - instrument

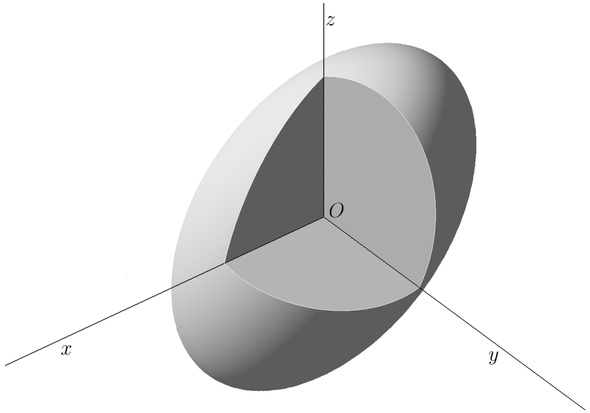


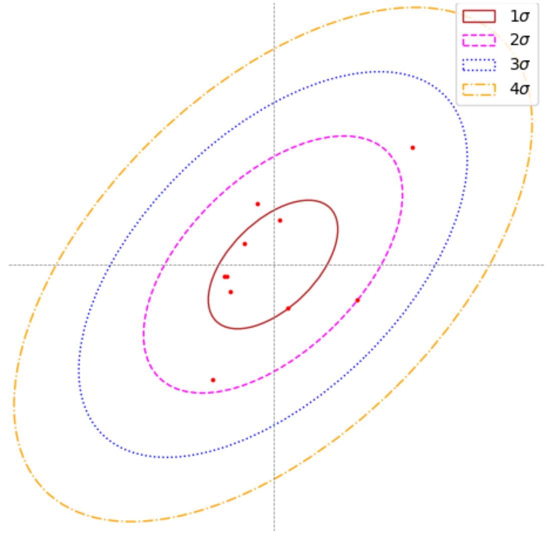
Définition actuelle wiki - lien

Incertitude de mesure
Terminologie ISO 5725-1

- Dispersion en conditions <u>stables</u>
  - Erreurs systématiques exclues
  - Répétabilité, précision (résultats), fidélité (instrument)
  - (*Wiederholbarkeit*, *repeatability, precision*)
- Dispersion en conditions <u>variées</u>
  - Erreurs systématique incluses
  - Reproductibilité (*Reproduzierbarkeit*, *reproducibility*)
- Proximité de la vérité
  - Justesse (=absence de biais) (*Richtigkeit*, *trueness*)
- Combination
  - Précision (fidélité) + justesse = <u>exactitude</u>
  - *Präzision (Innere Genauigkeit) + Richtigkeit = (äussere) Genauigkeit*
  - (*precision* + *trueness* = *<u>accuracy</u>*)

Distribution Gaussian 3D





- k (multiplicateur) vs probabilité

$\sqrt{\alpha}$	Probability [%]	Notation
1.00	19.9	1σ or standard ellipsoid
1.53	50.0	Spherical error probable (SEP)
$\sqrt{3}$	61.0	Mean radial spherical error (MRSE)
2.00	73.8	2σ ellipsoid
2.80	95.0	95% confidence level
3.00	97.1	3σ ellipsoid

- **3D** vs 2D

$\sqrt{\alpha}$	Probability [%]
1.00	39.4
1.18	50.0
$\sqrt{2}$	63.2
2.00	86.5
2.45	95.0
3.00	98.9

- Credit: ENV548 - Sensor Orientation

Covariance et corrélation

- Matrices $\mathbf{K}_{\ell\ell}$ $(\Sigma_{\ell\ell})$et $\mathbf{R}_{\ell\ell}$
  - Génération et interprétation
  - Chiffres significatifs
  - Représentation et stockage
  - Garder pour futurs exercices Python

Example: 3 variables aléatories

$$\ell =$$

$$\mathbf{K}_{\ell\ell}\left(\Sigma_{\ell\ell}\right) =$$

$$\mathbf{R}_{\ell\ell} =$$

Example: 3 variables aléatories

$$\sigma_{xy} \doteq \sigma_{yx} \quad \checkmark$$

$$\ell = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\mathbf{K}_{\ell\ell}}_{\text{ME}}\left(\underbrace{\Sigma_{\ell\ell}}_{\text{STAT}}\right) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} 1/\sigma_x & 1/\sigma_y & 1/\sigma_z \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1/\sigma_x \\ 1/\sigma_y \\ 1/\sigma_z \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{R}_{\ell\ell} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{xy} & 1 & \rho_{yz} \\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\sigma_x^2 \, \sigma_x}{\sigma_x \, \sigma_x}$$

$$\rho \in \langle -1 \;\; 1 \rangle \quad \checkmark$$

Speaker

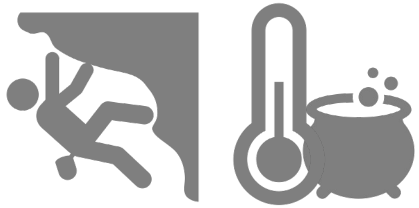
ME

Exemple
chiffres significatifs

$$\mathbf{K}_{ll} = \begin{bmatrix} 1.016 & 0.425 & 0.236 & 0.153 \\ 0.425 & 1.598 & 0.445 & 0.240 \\ 0.236 & 0.445 & 1.982 & 0.428 \\ 0.153 & 0.240 & 0.428 & 2.310 \end{bmatrix}$$

Covariance et corrélation

- Matrices $\mathbf{K}_{\ell\ell}\ (\Sigma_{\ell\ell})$ et $\mathbf{R}_{\ell\ell}$
  - Génération et interprétation :
    - ex. «Chute libre» et «Chau devant» – papier / calculette
  - Représentation et stockage :
    - ex. «AbracadaByte» – Python



- Pour jeudi
  - Lire la section **2.1** à **2.3**
  - Prépare des questions!
  - Inventaire des questions à 8:15, réponses dès 10:15
- Jeudi en salle cours avec votre ordinateur !
  - Env. 08:30 – 10:00, série 3 + corrigé séries 1 et 2

Avant de pianoter ...

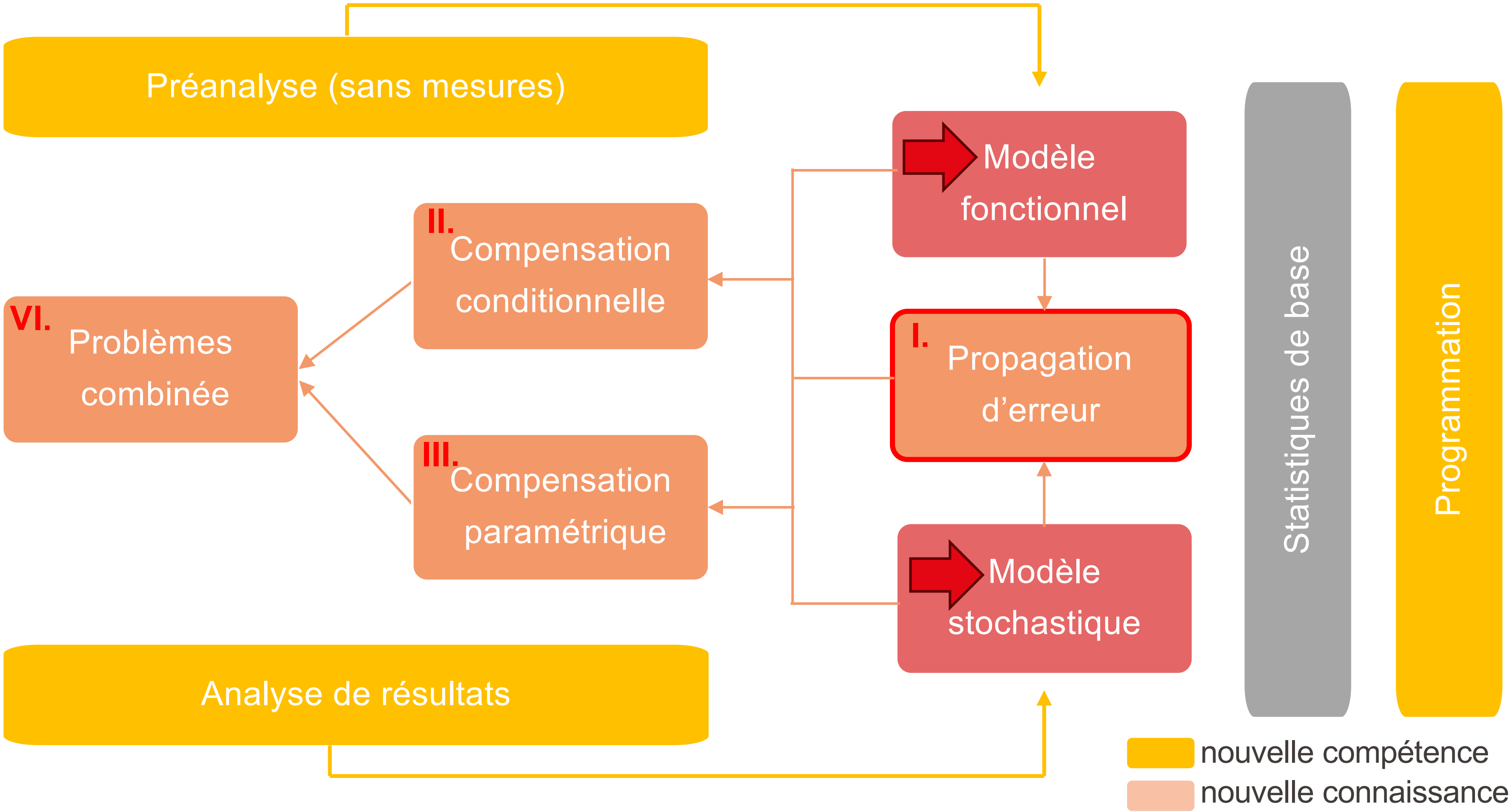
- Chapitre 1
  - Lire le chapitre 1
  - Inventaire des questions
  - Quleques réponses immédiates
  - Organisation des autres réponses

- Didactique
  - Pour qui?
  - Comment? *Explicit instruction model*
  - Combiner les approches
  - Visuel ou auditif?
  - Identifier les blocages
  - Appeler à l’aide!

EPFL

ME Cockpit de de matières et de compétences

- Comment réussir à observer et estimer avec confiance?



Propagation des erreurs dans un système

- Utilisation
  1. Analyse de sesibilité
  2. Erreur vrais
  3. Propagation de variance

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \\ \vdots \end{matrix}\right\} \mathbf{I} \Longrightarrow \boxed{\text{SYSTEM}} \Longrightarrow \mathbf{O} \left\{\begin{matrix} c \\ d \\ \vdots \end{matrix}\right.$$

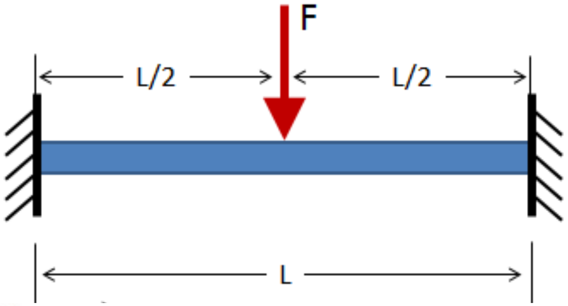
$$Out = \mathbf{f}(In)$$

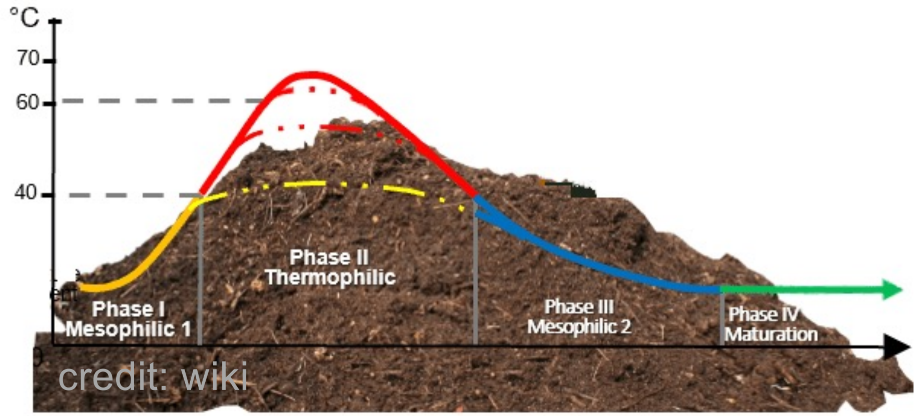
$$y = \mathbf{f}(\ell)$$

Erreur vrais

- Analyse de sesibilité
  - Changement à l'entrée et à la sortie
  - Section et déformation d'une poutre
  - Compost et température
  - Taux d'imposition marginal

- Propagation – expression matricielle
  - Dans une addition
  - Dans une multiplication
  - Pour une combinaison





$$y = \mathbf{f}(\ell) \implies \boxed{\delta y = \mathbf{F} \cdot \delta \ell}$$

Erreur maximale

- Dédinitions
  - **Ecart-type et tolérance**
  - Erreur absolue et relative

- Calcul d'incertitude
  - Addition et soustraction: **somme des erreurs absolues**
  - Multiplication: **somme des erreurs relatives**
  - Division? → exercice !

$$y = \mathbf{f}(\ell) \implies \boxed{\varepsilon_y = |\mathbf{F}| \cdot \varepsilon_\ell}$$

- Faiblesses des erreurs vrais et maximales
  - Comment tenir compte des <u>corrélations</u> des <u>données</u> ?
  - Comment obtenir les <u>corrélations</u> des <u>résultats</u> ?

Propagation d'erreur ...	... vraie *Analyse de sensibilité*	... maximale *Calcul de tolérance*	... moyenne ou quadratique *Propagation de variance*
modèle fonctionnel $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\ell)$	$\mathbf{F} =$		
modèle stochastique	?	$\varepsilon_i =$	σ_i ,
loi	$\delta\mathbf{y} =$	$\varepsilon_y =$	$\mathbf{K}_{yy} =$
cas particuliers opérations de base	$\delta_{a+b} =$ $\delta_{a-b} =$ $\delta_{a \cdot b} =$ $\delta_{a/b} =$	+ ou – : Σ err. absolue × ou ÷ : Σ err. relative	
propriétés	Si ℓ change de tant, y change de tant, et .... !	cumul pessimiste + ou × : $\rho = +1$ – ou ÷ : $\rho = -1$	On considère les corrélations dans ℓ. On obtient les corrélations dans y.
notamment		⚠	

Pour mardi prochain

- Completer le 2 column dans le tableau
  - Sensibilité
  - Tolérance

- Lire 2.4
  - Propagation de variance (3 pages)