Agenda - Compensation paramétrique

- Dernière fois
  - Analyse de résultats - théorie $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$, $\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}}$, $\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$
  - Promis plus sur l'itération

- Aujourd'hui
  1. Encore l'analyse de résultats
     - Global,
     - *Local*,
     - La *signifiance* des paramètres
  2. Les pièges de l'itération
     - Générale
     - Example de sinusoïde

Compensation paramétrique – Ecarte-type *a posteriori*

11. Ecarte-type *a posteriori* (Sec 4.5) – estimateur non-biaisé

- Similitudes avec la compensation conditionnelle:
  - minimum – somme des résidus pondérés au carrés $\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \longrightarrow \min.$
  - surdétermination – (pour la moyenne $r = n - 1$)
- Différences
  - Surdétermination exprimée:
    - la différence entre le nombre de observations et le nombre de paramètres

$$r = n - u \geq 0$$

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T \, \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{n - u}}$$

pourquoi?

Ecarte-type *a posteriori*

- l'idée de dérivation (idem à la compensation conditionnelle)
- On espère obtenir $E\{\hat{\Omega}\} = E\left\{trace\left(\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}\right)\right\} = \ldots$
  - On fait usage de
    - la trace - un opérateur commutatif
    - **P** – pas stochastique (éléments prédéfinis) → à l'extérieur d'espérance
    - $E\left\{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}\right\} = \sigma_0^2 \cdot trace\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}}\right) = \sigma_0^2 \cdot trace(\mathbf{P}\cdot\underbrace{\left[\mathbf{Q}_{\ell\ell} + \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\mathbf{A}^T\right]}_{\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}}})$
    - $\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} + \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\mathbf{A}^T$
    - $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}$
    - . $\vdots$
    - $E\{\hat{\Omega}\} = \sigma_0^2 \cdot (trace\ \underbrace{(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_{\ell\ell})}_{\mathbf{I}_n}) - \underbrace{\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\cdot\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\right)}_{\mathbf{I}_u}$
    - .
  - Si le résultat = espérance

$$= \sigma_0^2 \cdot (n-u) \qquad \Longrightarrow \hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{(n-u)}} \qquad \Longrightarrow r = (n-u)$$

Compensation paramétrique – Analyse

12. Globale (déjà vu)
    - Comme dans la compensation conditionnelle: $q_{glb} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sigma_0}$
    - Ou directement via $\mathbf{K}_{\ell\ell}$ $\quad q_{glb} = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{v}}^T\,\mathbf{K}_{\ell\ell}^{-1}\,\hat{\mathbf{v}}}{n-u}}$

13. Locale
    - (déjà vu) $\frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\ell_i}}$ où σ_{ℓ_i} est issu de $\mathbf{K}_{\ell\ell}/\mathbf{Q}_{\ell\ell}$
    - Résidu standardisé (à tester *k* = …)
      - définition $\frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}}$
      - attention - joli mais délicat (plus de détails à ce sujet dans le Ch. 5 – fiabilité)
    - (nouveau) - paramètre significatif
      - à tester: $\frac{\hat{x}_j}{\sigma_{\hat{x}_j}}$

Nous aimons les paramètres significatifs, nous voulons que ce quotient soit important, pour une raison précise !

Compensation paramétrique – Analyse paramètre significatif

$$
\begin{array}{ll}
(1) & y = c \\
(2) & y = c + a \cdot sin(\omega t) \\
(3) & y = c + a \cdot sin(\omega t + \phi) \\
(4) & y = c + a \cdot sin(\Omega t + \phi) \quad \Omega = 2\pi/24
\end{array}
$$

- Exemple de sinusoïde
  - Trois ou quatre paramètres ?
  - Cas n°3 (c) versus n°4 (d)

$$
\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{A} \\ \hat{\omega} \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{A} \\ \Omega \\ \hat{\varphi} \end{bmatrix}
$$

$\approx 24.11 \text{ h}$

fixé à 24 h

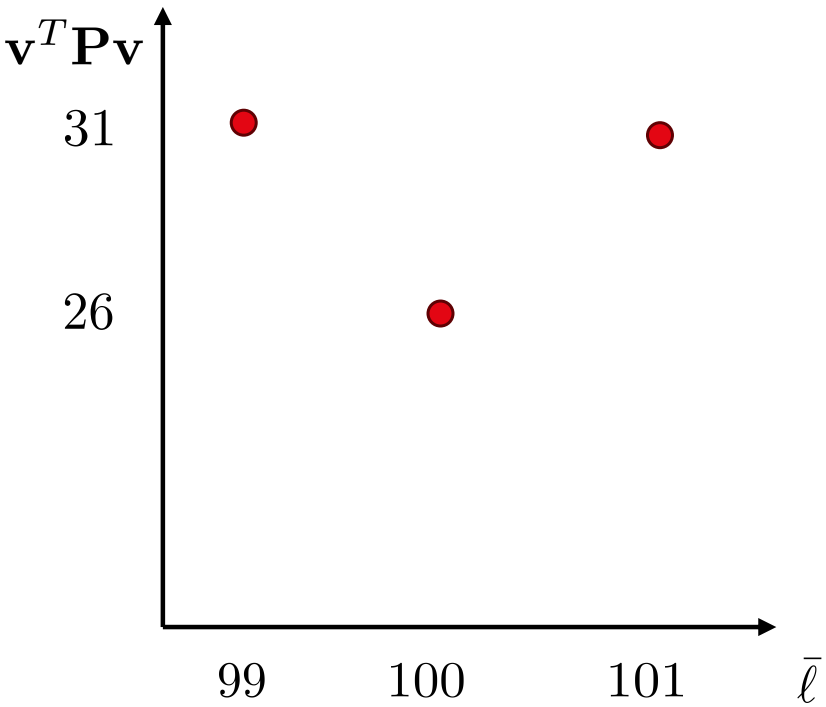
$$
\frac{\hat{T}-24}{\sigma_{\hat{T}}} = \frac{24.11-24}{0.07} = \frac{0.11}{0.07} \approx 1.5 \leq 2 \text{ à } 3
$$

Nous n'intéressons pas à la différence entre T et son écart-type, mais à la différence entre T et 24 heures !

Linéarisation – cas particulier (linéaire)

- Moyenne artihmétique

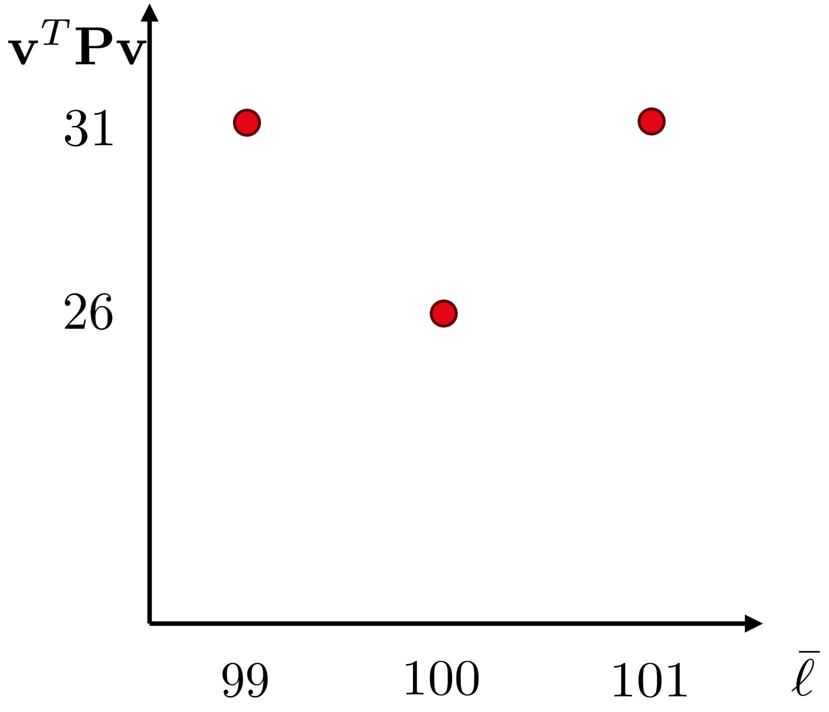
$$\ell = \begin{bmatrix} 101 & 96 & 102 & 99 & 102 \end{bmatrix}$$



Linéarisation –cas particulier (linéaire)

- Moyenne artihmétique

$$\ell = \begin{bmatrix} 101 & 96 & 102 & 99 & 102 \end{bmatrix}$$



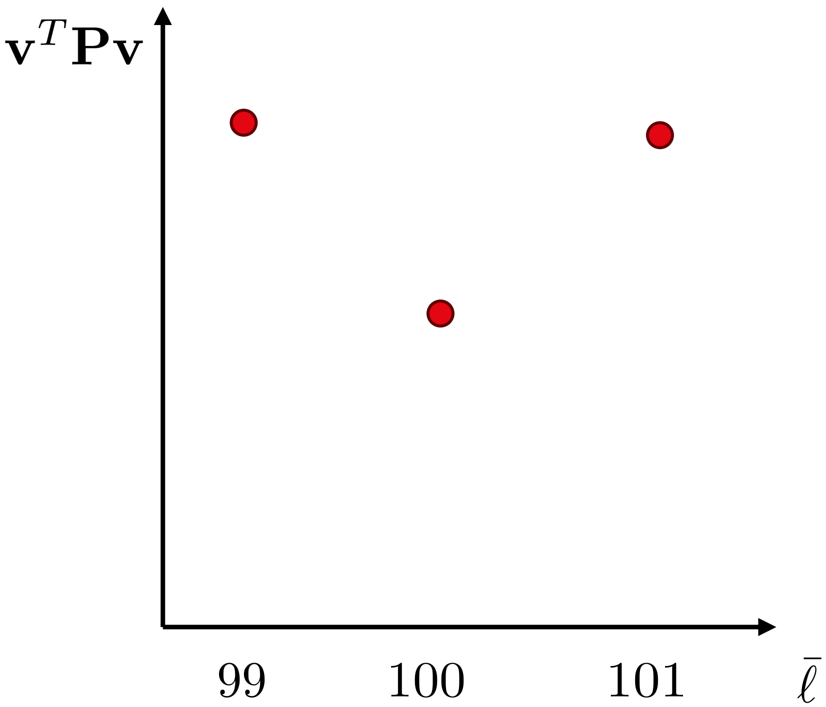
- Application
  - Exo 10 sinusoïde – cas 1(a)
    $$y = c$$
  - triangle
  - quadrilatère (démo!)
  - :
- Cas (quadri_param.py sur Moodle)

1. par. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}^T$
   $\mathring{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma & \delta \end{bmatrix}^T$
2. par. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^T$
   $\mathring{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sum \alpha/2 & \sum \beta/2 & \gamma \end{bmatrix}^T$
3. par. idem
   $\mathring{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
4. par. idem, pas d'approximation

Linéarisation – cas particulier (linéaire)

- Moyenne artihmétique (ME 6-3)

$$\ell = \begin{bmatrix} 101 & 96 & 102 & 99 & 102 \end{bmatrix}$$

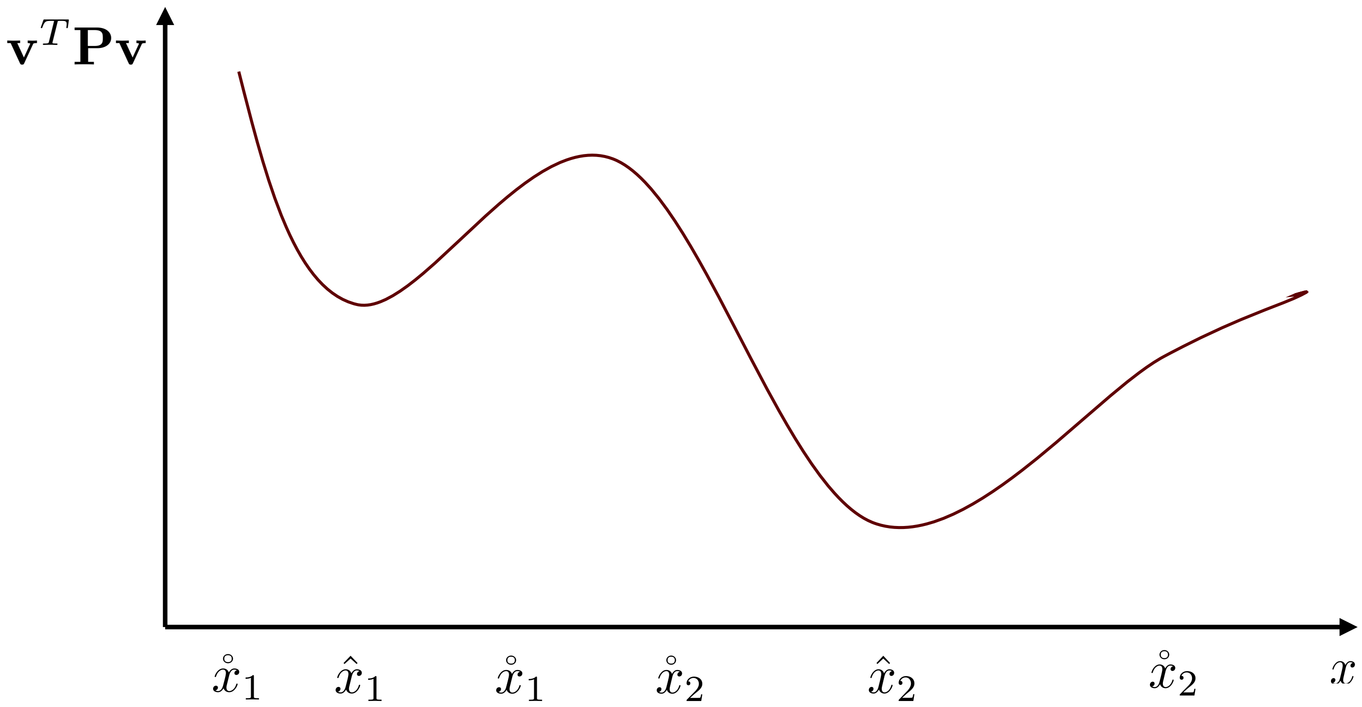


- Application
  - Exo 10 sinusoïde – cas 1(a)
    $y = c$
  - triangle
  - quadrilatère (démo!)
  - :
  - *toutes les relations linéaires*

- Morale
  - **approximation n'est pas nécessaire**
  - ou peut être *n'importe laquelle*

Linéarisation - cas général

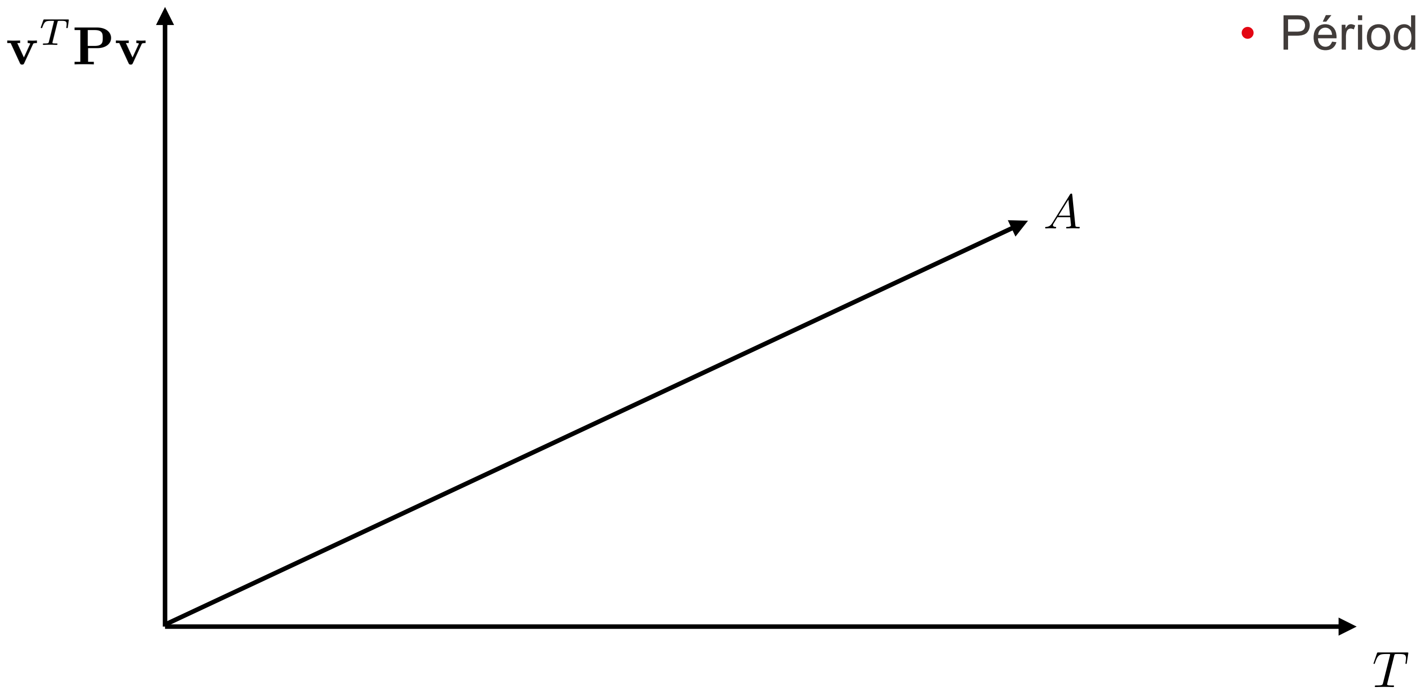
- Fonction d'une variable



Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

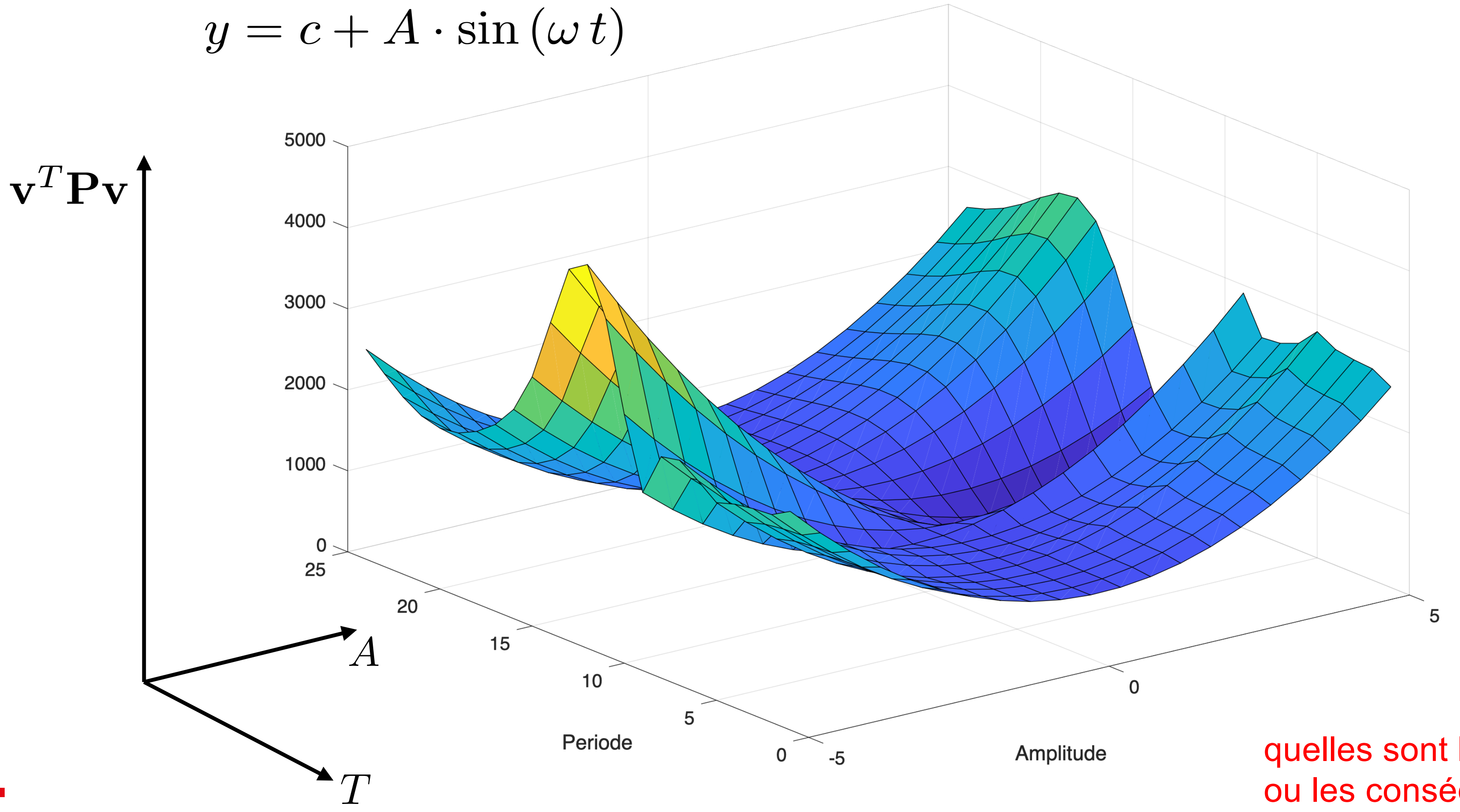
$$y = c + A \cdot \sin(\omega\, t)$$

- Fonction deux paramétrès
  - (constant est connue, fixé)
  - ***A***mplitude
  - Période (***T***emps en heures)



Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

$$y = c + A \cdot \sin(\omega\, t)$$

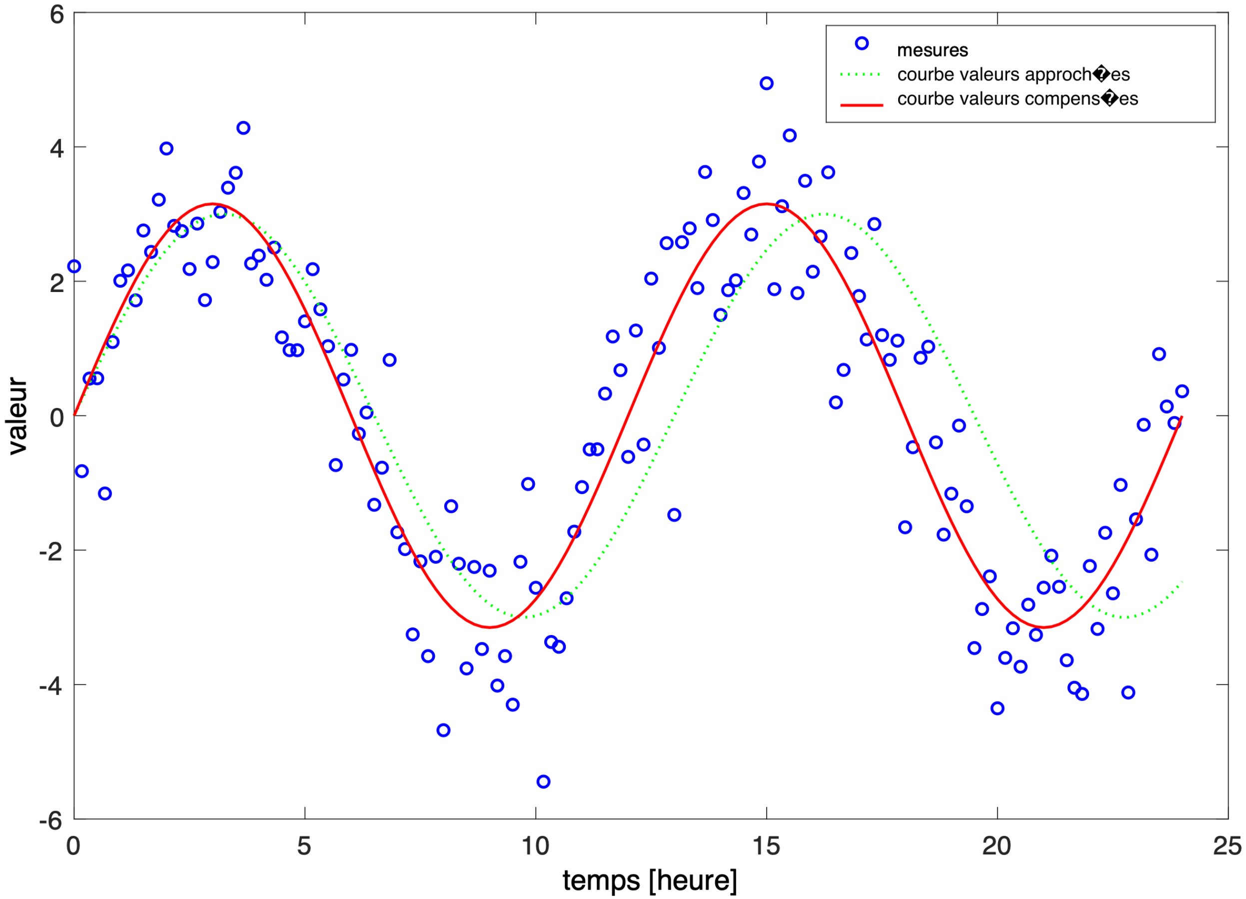


quelles sont les implications / ou les conséquences ?

Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

$$y = c_0 + A \cdot \sin(\omega\, t)$$

$\mathring{\mathbf{x}}$ = Amplitude = 3, période = 14



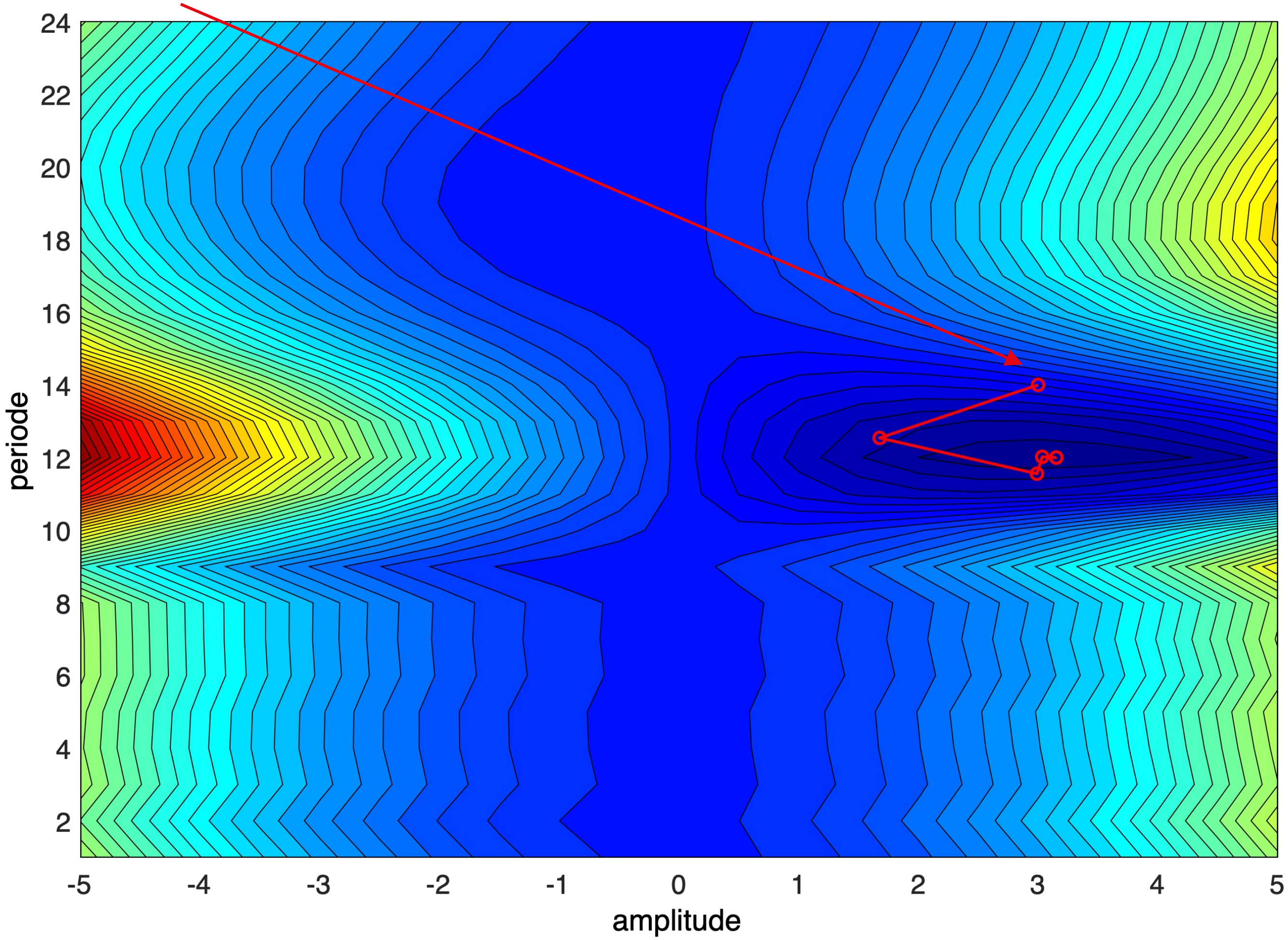
Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

$$y = c_0 + A \cdot \sin(\omega t)$$

$\mathring{\mathbf{x}}$ = Amplitude = 3, période = 14

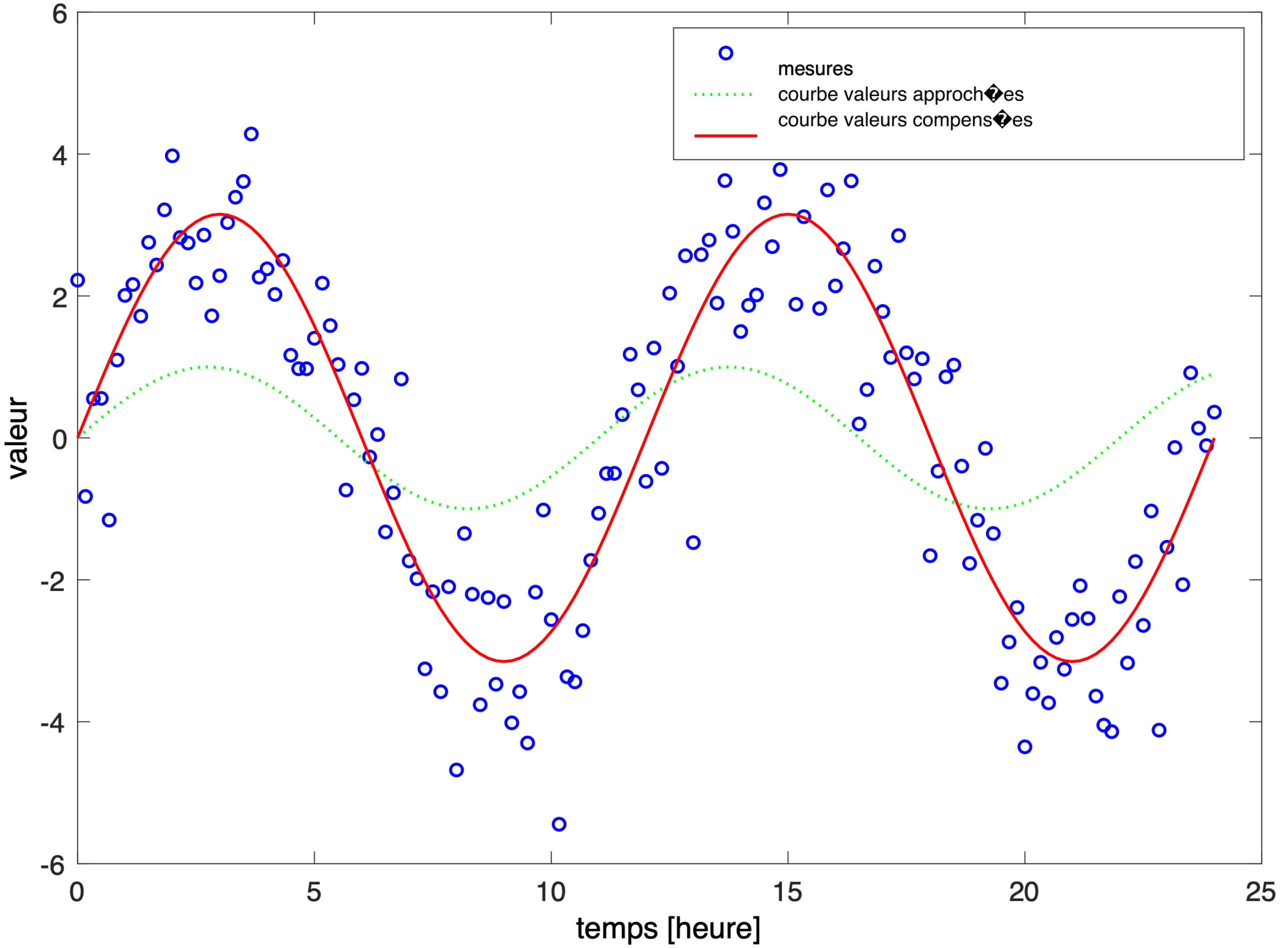
$\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}$

en couleur
(courbes = isolignes)



Linéarisation - cas sinusoïde 2(b) $y = c_0 + A \cdot \sin(\omega\, t)$

$\mathring{\mathbf{x}} =$ Amplitude = 1, période = 11

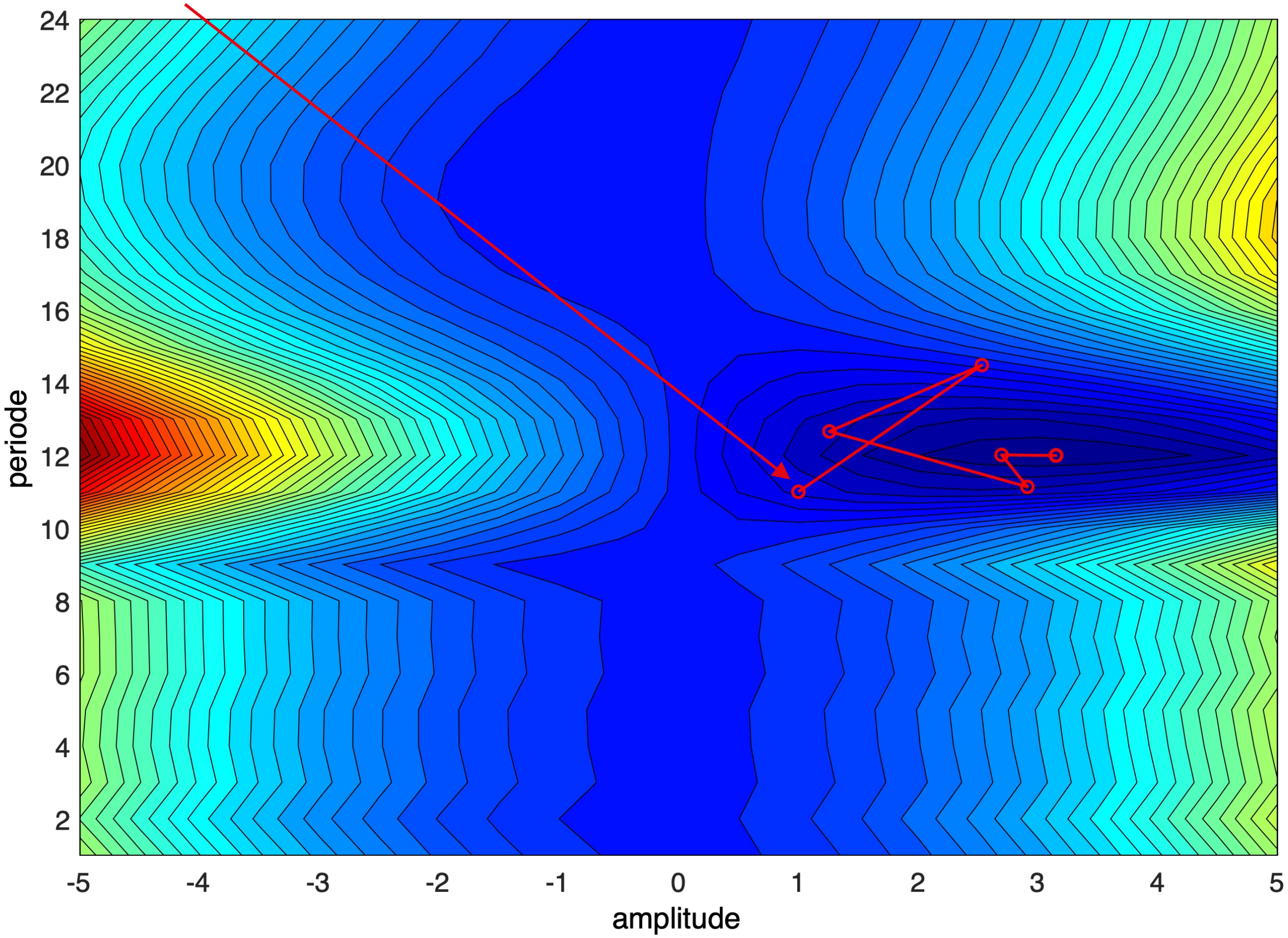


Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

$$y = c_0 + A \cdot \sin(\omega\, t)$$

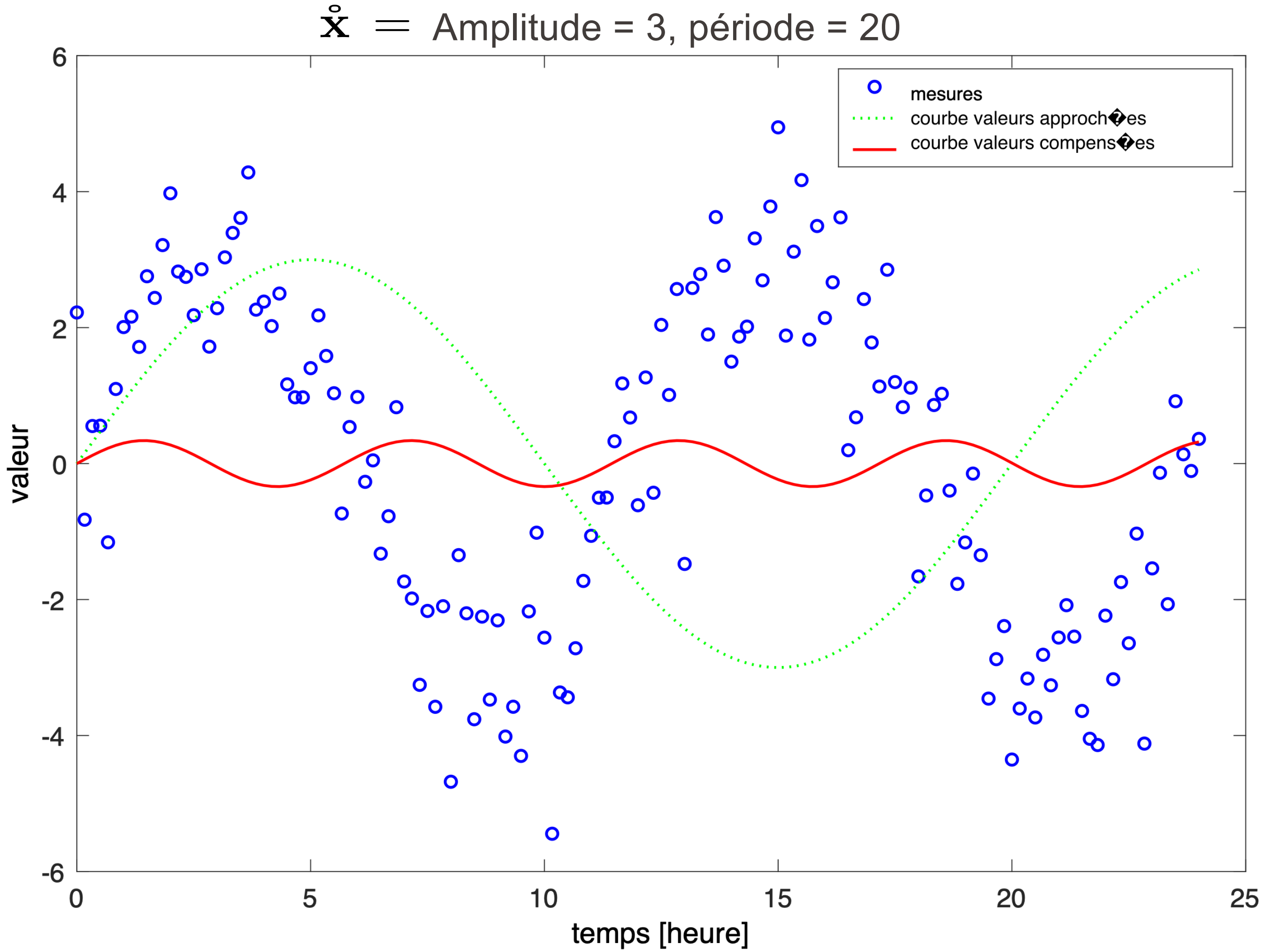
$\mathring{\mathbf{x}}$ = Amplitude = 1, période = 11

$\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}$
en couleur
(courbes = isolignes)



Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

$$y = c_0 + A \cdot \sin(\omega\, t)$$



EPFL

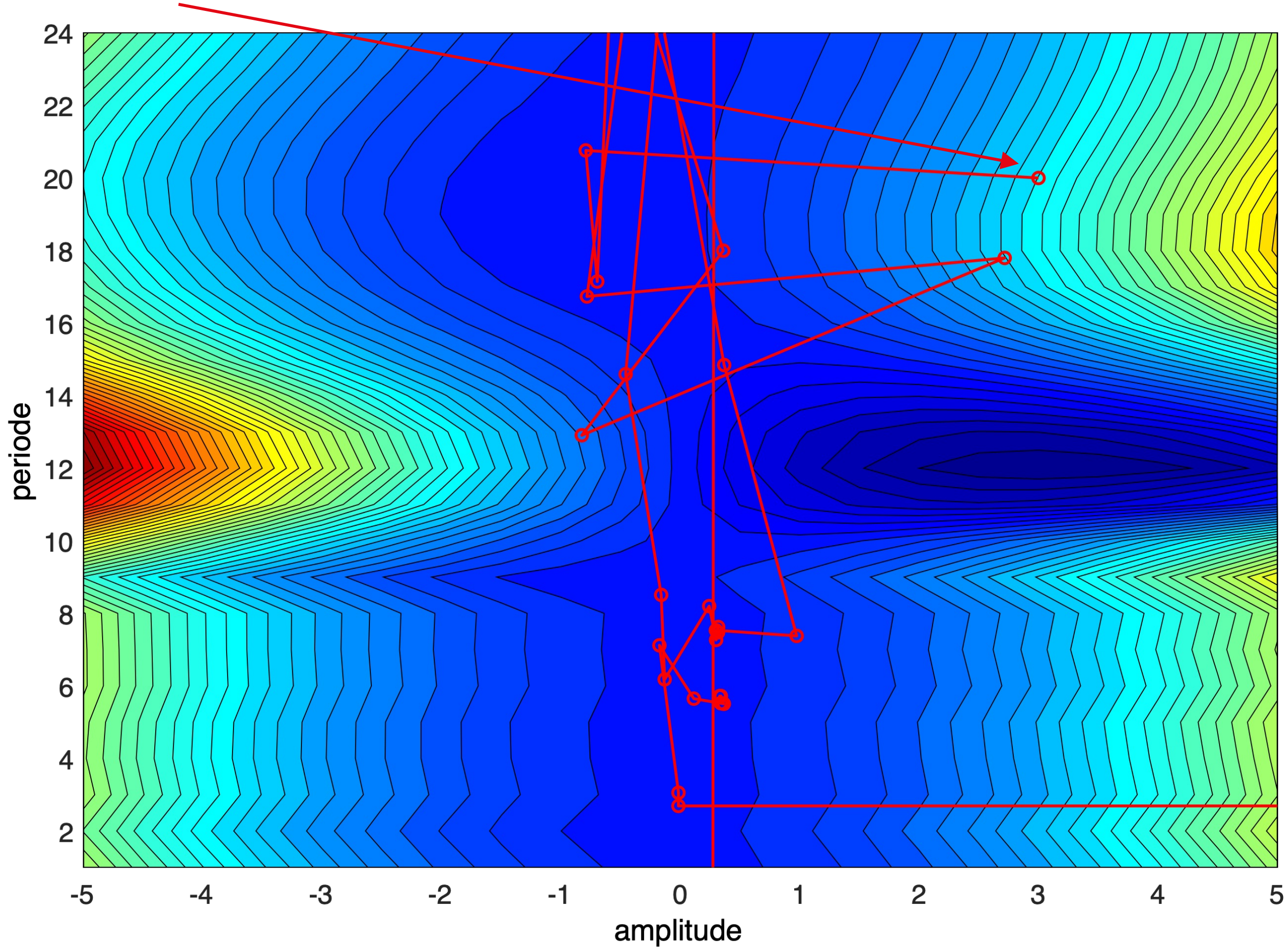
Linéarisation - cas sinusoïde 2(b)

$$y = c_0 + A \cdot \sin(\omega\, t)$$

$\mathring{\mathbf{x}}$ = Amplitude = 3, période = 20

$\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}$

en couleur
(courbes = isolignes)

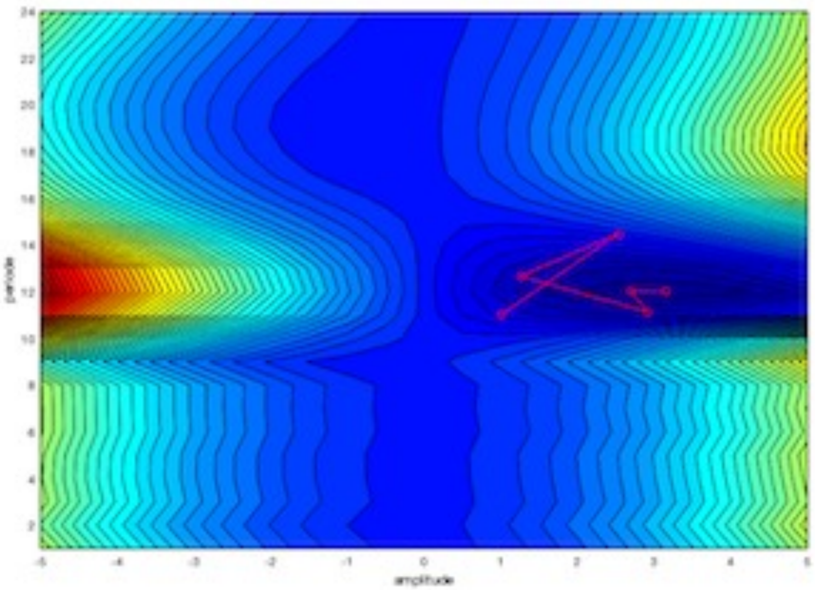


- Divergence
  - No itération!
  - dx oscille!
  - dx large !

Compensation paramétrique – **Linéarisation**

- Linéarisation – itérations et convergence
  - Résidus approchés, incréments des paramètres
  - Critères: taille des incréments, forme quadratique
  - Choix des paramètres approchés, faux extremum?

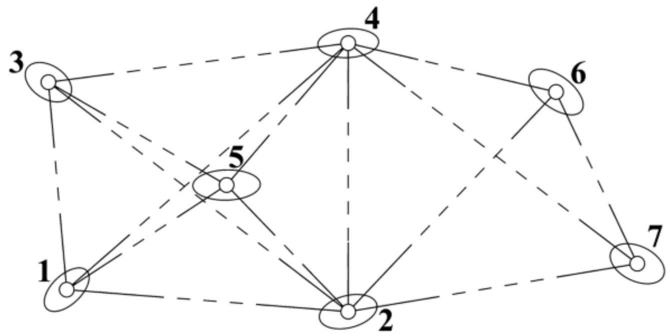
- Exemples
  - Cas linéaires:
    - Moyenne arithmétique (rappel)
    - Quadrilatère (exercice interactif)
  - Cas non-linéaire:
    - sinusoïde avec *amplitude* et *période*



Compensation paramétrique – Poser le problème

- Surdetermination
  - Nombre d'observations $\ell\,(n \times 1)$
  - Nombre de paramètres $\mathbf{x}(u \times 1)$
  - Surdétermination $r = n - u \geq 0$
- Modèle fonctionnel
  - Choix du modèle paramétrique $\ell - \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$
  - Choix des paramètres approchés $\mathring{\mathbf{x}}$
  - Résidus approchés $\mathring{\mathbf{v}} = \ell - \mathbf{f}(\mathring{\mathbf{x}})$
  - Linéarisation (*analytique* ou *numérique*) $\mathbf{A} = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ en $\mathring{\mathbf{x}}$
- Modèle stochastique
  - Écart-type *a priori* σ_0 et cofacteurs $\mathbf{Q}_{\ell\ell}$ $\mathbf{P} = (\mathbf{Q}_{\ell\ell})^{-1}$
  - Variances et covariances $\mathbf{K}_{\ell\ell}$ $\mathbf{P} = (\mathbf{K}_{\ell\ell})^{-1}$

Compensation paramétrique – Analyse des résultats



- Premier résultats
  - paramètres compensés $\hat{\mathbf{x}}$, formules 13 et 14
- Autres résultats
  - résidus compensés $\hat{\mathbf{v}}$, formules 15 ou 16
  - observations compensées $\hat{\ell}$
  - cofacteurs $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$, $\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}}$ et $\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$
- Estimation de la précision
  - variance et écart-type *a posteriori*
  - quotient global: $\hat{\sigma}_0$ *a posteriori* / σ_0 *a priori* $= \hat{\sigma}_0 / \sigma_0$
  - Résidu significatif ? À tester :
    - le quotient local : résidu / écart-type de l'observation $= \hat{v}_i / \sigma_{\ell_i}$
    - le résidu standardisé : résidu / son écart-type $= \hat{v}_i / \sigma_{\hat{v}_i}$
  - Paramètre significatif ? tester : $\hat{x}_j / \sigma_{\hat{x}_j}$

Comp. paramétrique – Interpréter les résultats

- Résidus
  - Analyse *globale*: $\hat{\sigma}_0$ *a posteriori* / σ_0 *a priori*
  - Analyse *locale*:
    - Détection de fautes: cas particuliers
    - Détection d'erreurs systématiques : tendances
  - Adaptation des modèles
    - fonctionnel : autres paramètres, exemple de sinusoïde dans cas 3(c) vs. 4(d)
    - Stochastique : autres variances et corrélations

- Cofacteurs
  - Paramètres compensés
    - Précision du dispositif de mesure (variances)
    - Capacité de distinguer des paramètres (corrélations)
  - Résidus compensés
    - Capacité de détecter des fautes (fiabilité)
  - Observations compensées : précision des observations