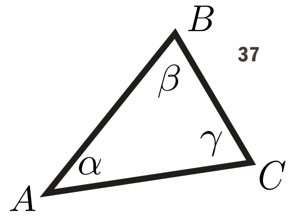
ME 10-1 : Agenda

- Compensation paramétrique
  - linéaire – exemple: triangle + générale
  - non-linéaire compact (polycopié)
  - développé – exemple: tableau + logarithme sur Moodle
- Résolution
  - taille des matrices – à inverser: $u \times u$
  - Solution numerique d'une exemple
  - Solution analytique d'autres exemples

Exemple de triangle en compensation paramétrique

$$\ell_\alpha = 035.471\,\mathrm{gon}$$
$$\ell_\beta = 107.383\,\mathrm{gon}$$
$$\ell_\gamma = 057.122\,\mathrm{gon}$$



- Avant (connu en conditionnelle)

$$(\ell_\alpha - v_a) + (\ell_\beta - v_b) + (\ell_\gamma - v_g) - 200 = 0$$

- Procédé « paramétrique «
  - Une équation par chaque observation
  - Paramètres indépendants?
    - Pas plus des paramètres que nécessaires
    - (sinon pas de redondance, ou problème combiné)
  - Pratiquement comment?

- www.ttpoll.eu
- Room: ME4U (en majuscules)

$$\ell - \mathbf{v} = f(\mathbf{x})$$

Rappelle
compensation paramétrique

- Modèles
  - générale $\ell - \mathbf{v} = f(\mathbf{x})$
  - **linéaire** ? (tableau)
    - en vecteur - matrice

$$(\ell - \mathbf{a}_0) - \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

- développé

$$\begin{cases} \check{\ell}_1 = a_{10} + a_{11}\check{x}_1 + \cdots + a_{1u}\check{x}_u \\ \vdots \\ \check{\ell}_n = a_{n0} + a_{n1}\check{x}_1 + \cdots + a_{nu}\check{x}_u \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} a_{10} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_0} - \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1u} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nu} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_u \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

Rappelle
compensation paramétrique

- Modèles
  - générale $\ell - \mathbf{v} = f(\mathbf{x})$
  - Non-linéaire ? (tableau)
    - en vecteur - matrice

$$\begin{cases} \ell_1 - v_1 = f_1(\check{x}_1 + \cdots + \check{x}_u) \\ \vdots \\ \ell_n - v_n = f_n(\check{x}_1 + \cdots + \check{x}_u) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \mathring{v}_1 \\ \vdots \\ \mathring{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1(\mathring{x}_1 + \cdots + \mathring{x}_u) \\ \vdots \\ f_n(\mathring{x}_1 + \cdots + \mathring{x}_u) \end{bmatrix}$$

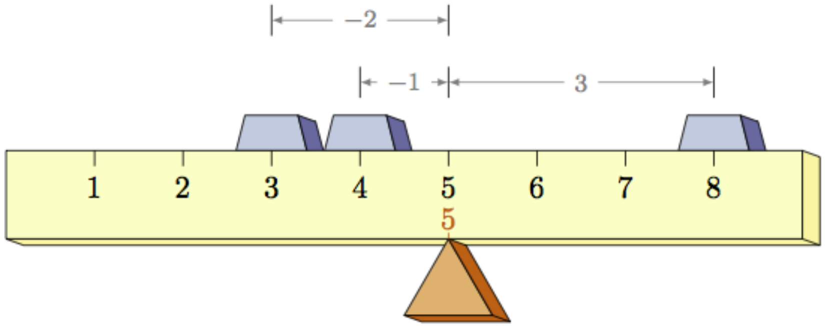
$$\begin{bmatrix} \mathring{v}_1 \\ \vdots \\ \mathring{v}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1u} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nu} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}=\frac{\partial f_i()}{\partial \mathbf{x}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \vdots \\ \delta x_u \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{x}}$$

Exemple de logarithme en compensation paramétrique

- Modèles
  - Non-linéaire $\ell - \mathbf{v} = f(\mathbf{x})$
  - Logarithme $\ell_i - v_i = f_i(a,\, b) = a \cdot \ln(b + t_i)$

- Résolu sur Moodle

Moyenne arithmétique
en c. paramétrique

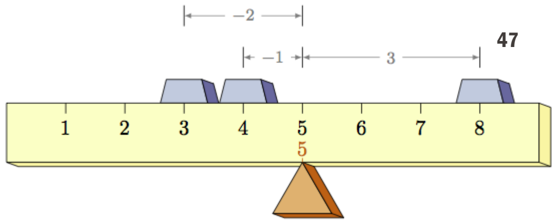


- Objectifs
  - applique le concept des moindres carrées
  - apprivoiser les formules générales

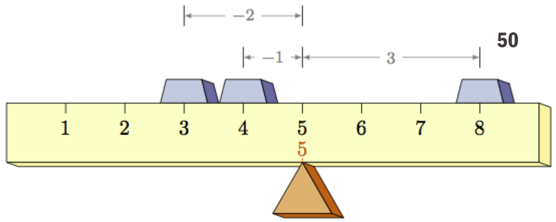
- Poser le problème dans le cas général
  - minimum sous conditions (Lagrange)
  - dériver par rapport à ***v***, à ***k*** et à ***x***
  - résoudre le système d'équations

- Court-circuiter Lagrange (merci à Gauss ;-)
  - grâce au modèle simple, placer ***x*** dans ***v*** (après ***k*** devient inutile)
  - dériver la forme quadratique uniquement par rapport à ***x***
  - déjà fait pour introduire les moindres carrés Exo7 *et cela n'avait surpris personne!*
  - retour ou solution avec corrélations (semaine 4 "au garage")

moyenne pondérée en c. paramétrique
poser le problème :



moyenne pondérée en c. paramétrique poser le problème :



$$\left.\begin{array}{l}\check{\ell}_1 = \check{x}\\ \vdots \\ \check{\ell}_n = \check{x}\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}\ell_1 - v_1 = x\\ \vdots \\ \ell_n - v_n = x\end{array}\right\} \qquad \begin{bmatrix}\ell_1\\ \vdots\\ \ell_n\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_0} \underbrace{\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} x$$

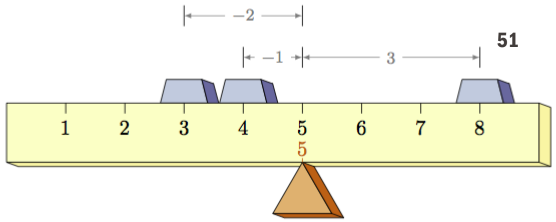
Objectif général: $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$

$$\text{si} \quad \mathbf{P} = \mathbf{I}_n \quad \Longrightarrow \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{v}^T \mathbf{v} \; = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

À minimiser soi par Gauss (Exercice 7) [car simplification possible]
ou par Lagrange … (suit)

moyenne pondérée en c. paramétrique
solution poids uniteurs

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{v}^T\mathbf{v} = \sum^{n} v_i^2$$



Lagrange: $$\mathbf{\Omega} = \sum v_i^2 - 2k_1(\ell_1 - v_1 - x) - \cdots 2k_n(\ell_n - v_n - x)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 2k_1 \ldots 2k_n = 0 \implies \sum k_i = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial v_1} &= 2v_1 + 2k_1 = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \Omega}{\partial v_n} &= 2v_n + 2k_n = 0 \end{aligned}\right\} \implies \sum v_i + \overbrace{\sum k_i}^{0} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial k_1} &= -2(\ell_1 - v_1 - x) = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \Omega}{\partial k_n} &= -2(\ell_n - v_n - x) = 0 \end{aligned}\right\} \implies \sum \ell_i - \overbrace{\sum \hat{v}_i}^{=0} - n\,\hat{x} = 0$$

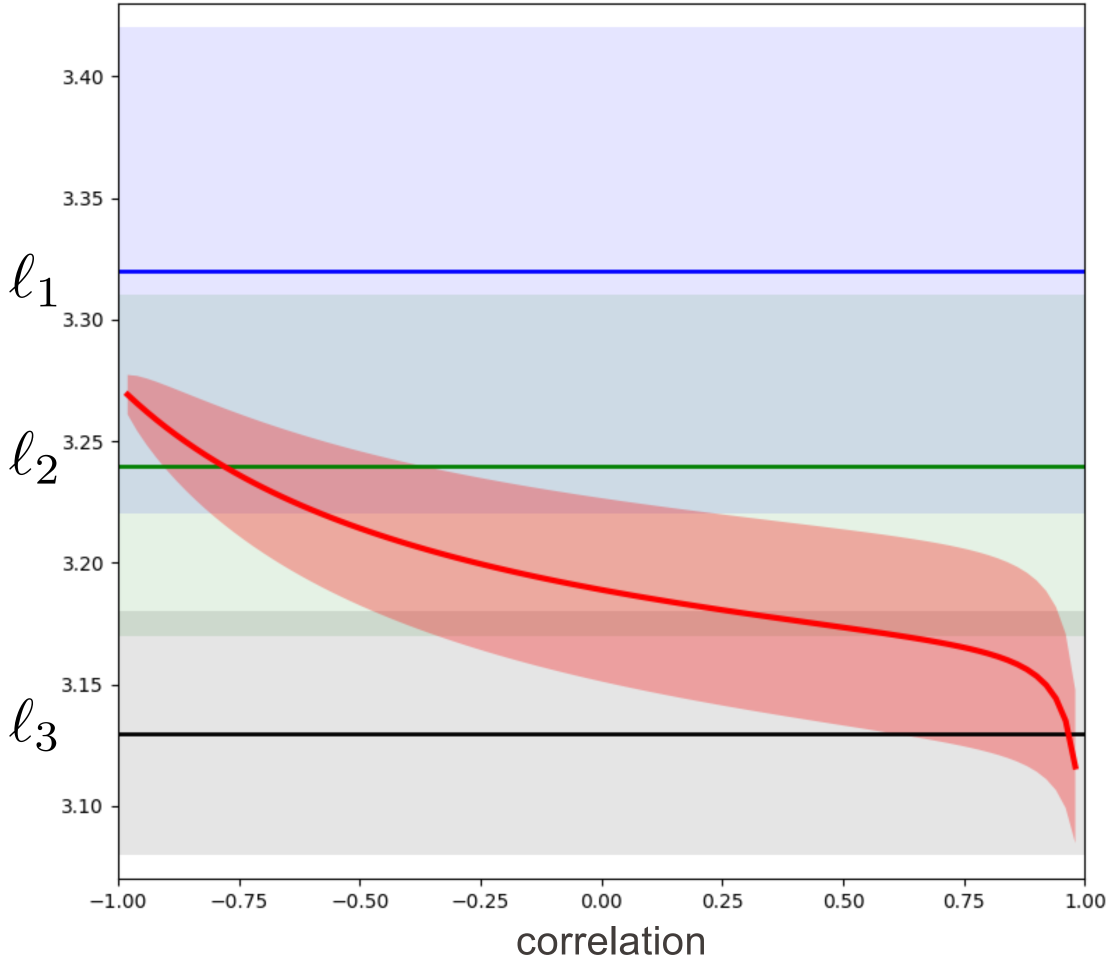
$$\implies \hat{x} = \frac{\sum \ell_i}{n}$$

moyenne pondérée en c. paramétrique exemple ME4 - au garage

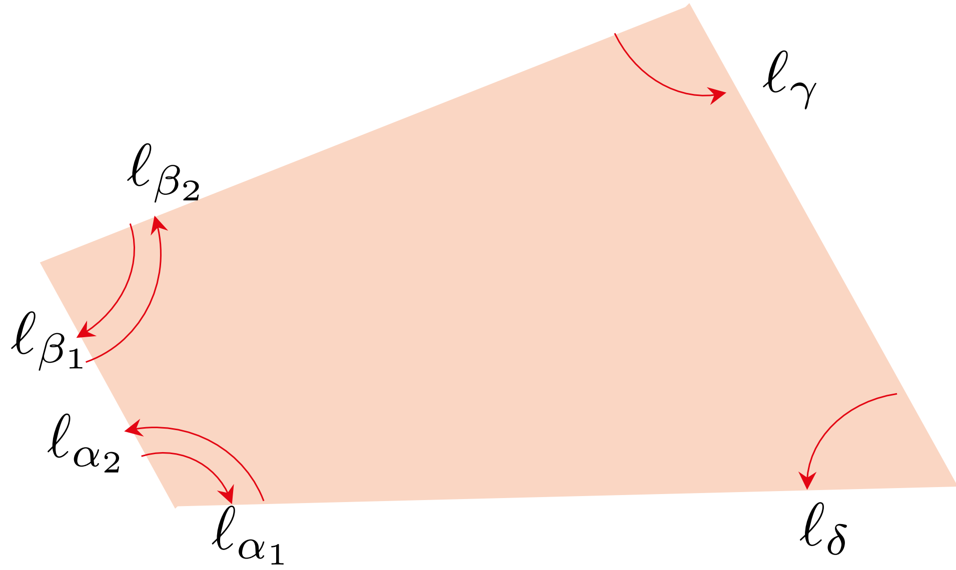
garage_demarche.py

```
# Modèle pour 3 observations
obs = np.array([3.32, 3.24, 3.13])
A = np.array([[1, 1, 1]]).T

for i in range(maxi):
    # rho[i] = . . .
    # Matrice de cofacteurs variable
    Qll[0, 1] = q[0] * q[1] * rhoab[i]
    Qll[1, 0] = Qll[0, 1]
    P = np.linalg.inv(Qll)  # poids

# Compensation paramétrique
    N = np.linalg.inv(A.T @ P @ A)
    Aux = N @ A.T @ P
    xcomp = Aux @ obs  # paramètre comp.
    moy[i] = xcomp     # selon rho[i]
```

rouge – **moyenne pondérée** en fonction de **corrélation** entre les mesures **1 & 2**



Exemple - Quadrilatère



- Observations

  $\alpha\ 2\times,\ \beta\ 2\times,\ \gamma,\ \delta$

  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$

- Solution(s)
  - A. Proposez vous-même (par 2 ou 3)
  - B. Montrez-le au tableau

Poser le problème

1. Combien des mesures ?
2. Choix des paramètres ?
3. Modèle stochastique = ?

Pour jeudi

- Lire
  - Sec. 4.3 Itération et convergence (1 p)
  - Énoncé: Exercice 10, polycopié 4.9.2 (p 90-92)